

## AUXILIAR 6

MA3403 - PROBABILIDADES Y ESTADISTICA  
PROFESOR: FERNANDO LEMA  
AUXILIARES: MARTÍN CASTILLO - JOSÉ CERECEDA  
26 DE SEPTIEMBRE DE 2014

**P1.** Sea  $X \sim \exp(\alpha)$ ,  $Y|X \sim U(0, X)$ .

- Calcule  $\mathbb{E}(Y)$ .
- Determine  $f_{X|Y}(x|y)$ .

**P2.** La empresa AGUASPOTABLES sospecha que alguna de sus  $N$  fuentes de agua puede estar contaminada y para abordar el problema lo contratan a usted por sus conocimientos en probabilidades.

Una posibilidad (no muy original) es tomar  $N$  muestras (una por cada fuente) y realizarles una prueba a cada una por separado para ver cual(es) están contaminadas.

Otra posibilidad es agrupar las fuentes en  $k$  grupos (disjuntos) de tamaño  $n$  cada uno (notar que en este caso  $N = nk$ ). Y luego realizar el siguiente procedimiento:

- Para cada grupo mezclar las muestras de agua y realizar una prueba para ver si alguna esta contaminada.
  - Para cada grupo si su mezcla esta contaminada entonces realizar una prueba por cada fuente que pertenecía al grupo.
- Calcule el valor esperado de muestras que se harán en el segundo caso. Para esto considere que la probabilidad de cada fuente de estar contaminada es  $p$  y es independiente de las demás.
  - Compare el resultado anterior con  $N$ .

**P3.** Suponga que usted tiene que hacer un tramite. La cantidad de gente que esta en la fila (antes que usted) es una v.a.  $N$  y  $(T_i)_{i=1}^{\infty}$  v.a.'s i.i.d. que representan el tiempo que demora cada persona en hacer su tramite. Si  $\mathbb{E}(N), \mathbb{E}(T_i) < \infty$  para todo  $i$ . Demuestre que el tiempo esperado que tendrá que esperar para su turno es:

$$\mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{E}(T_1).$$

**P4. Equilibrio de Nash**

Un vendedor remata un bien a dos potenciales compradores. La valoración de los compradores por el bien es conocimiento común e igual a  $v > 0$ . El vendedor decide rematar el bien en el formato todos pagan:

- Los participantes simultáneamente ofrecen sumas  $x_1, x_2 \geq 0$ . El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien pero sí paga su oferta. El empate se resuelve lanzando una moneda equilibrada.

- Deduzca la función de utilidad de cada comprador.
- Sea  $X_1$  y  $X_2$  v.a.(continua) de la oferta de cada comprador. Suponiendo que

$$\text{(Condición Necesaria)} : \mathbb{E}(u_2(X_2, X_1)) = \mathbb{E}(u_2(t, X_1)), \forall t \in R_{X_2} = [a, v],$$

donde  $a$  es desconocido. Encuentre la densidad de  $X_1$  y el parámetro  $a$ .

Asuma que  $X_1$  tiene la misma distribución que  $X_2$ .

- Calcule la utilidad esperada de cada jugador y la recaudación esperada del vendedor.

**P5.** Considere el paseo aleatorio en dos dimensiones, es decir un jugador se ubica en el origen de la recta y da un paso al lado derecho con probabilidad  $p$  y hacia la izquierda con probabilidad  $(1 - p)$ . Calcule el lugar esperado donde se encontrara el jugador luego de  $N$  pasos.

**Indicación:** Puede serle útil definir la v.a.  $X_i$  tal que  $\mathbb{P}(X_i = 1) = p, \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$ .