Problemas

P1. Se dice que una v.a. X tiene distribución de Pareto de parámetro X_0, α ($X_0 > 0, \alpha > 0$) si su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha X_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geq X_0 \\ 0 & \text{si } x < X_0 \end{cases}$$

a) Calcule $\mathbb{E}(X)$, $Var(X)$.

b) Si $Y = \ln\left(\frac{X}{X_0}\right)$, determine la densidad de Y.

c) Considere que X representa el ingreso (en miles de \$) mensual de un grupo de individuos con $X_0 = 200$ y $\alpha = 2$. Suponga que de un gran número de individuos se escogen 5 al azar en forma independiente. Calcule la probabilidad de que al menos 4 de ellos tengan ingresos superiores a \$300.000.

d) Si a todas las personas que ganan menos de \$400.000 se les da un reajuste de un 10 %, mientras que a aquellos que ganan más de \$400.000 se les da \$40.000 de reajuste. Determine la distribución de probabilidad de la v.a. monto de reajuste. Calcule además, su esperanza.

P2. Considere una secuencia finita de números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ todos distintos, y desea ordenarlos de menor a mayos, para esto considere el algoritmo '**Bogosort**' que consiste en permutarlos y verificar si estan ordenados. El algoritmo queda descrito por el siguiente pseudo-código

- Deck $\leftarrow (x_1, x_2, ..., x_n)$
- Mientras (Deck no este ordenado)
- $\{Deck \leftarrow shufle(Deck)\}$
- Retornar Deck

a) Calcule la probabilidad de que el algoritmo pare.

b) Calcule el número esperado de iteraciones que da el algoritmo.

P3. Suponga que la duración de un equipo sigue una distribución $exp(\lambda)$, es decir:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para efectuar el control de calidad se cuenta con un operario cuya misión es medir la duración de los equipos. Los equipos se ponen a funcionar en $t = 0$, pero el operario (por flojera) sólo se pone a inspeccionar en $t = t_1$, de tal forma que a todo equipo fallado anteriormente le asigna t_1 horas. También por flojera el operario se va temprano (antes que termine el proceso) y a todo equipo que en t_2 (hora en que se va) este bueno le asigna t_2 horas.

a) Determine la distribución de Y: duración informada por el operario. Calcule además $\mathbb{E}(Y)$.

b) Considere ahora que el operario se pone honesto y decide eliminar de su proceso a todos los quipos que no haya inspeccionado realmente. Determine la distribución de Z: duración informada por el operario.

c) Si Y se distribuye como una exponencial de parámetro α, independiente de X, calcule $\mathbb{P}(Y > kX)\ \forall k$.

d) Determine la densidad de $Z = X + Y$.

P4. De un mazo de naipes se sacan dos cartas sin reposición, definiendo el vector aleatorio (X, Y) como X: N de monos obtenidos, Y: N de ases obtenidos.

a) Determine la distribución de probabilidades de (X, Y).

b) Determine las distribuciones marginales de X e Y. Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{E}(Y)$.

c) Determine la distribución condicional de X dado $Y = y$, $\forall y \in R_Y$ y la distribución condicional de Y dado $X = x$, $\forall x \in R_X$.

d) Determine la distribución de probabilidades de las variables $M = H(X, Y) = Max\{X, Y\}$; $N = G(X, Y) = Min\{X, Y\}$.

P5. Un plano está dividido en rectas paralelas separadas por una distancia L_1 una de la otra. Se dispone de una aguja (barra) de largo L_2 ($L_2 < L_1$), que es lanzada al azar sobre el plano. Calcule la probabilidad que la aguja corte alguna de las rectas. Evalúe en $L_1 = L$ y $L_2 = \frac{L}{2}$.

P6. La fuerza magnética H en un punto P ubicado a X unidades de un clable con corriente I, queda dada por:

$$H = \frac{2I}{X}$$

a) Si P es un punto variable con X e I, suponiendo que X se distribuye uniforme en el intervalo (2,4) e I uniforme en el intervalo (10,20) (ambas variables independientes), calcule la función de densidad de H.

b) Calcule $\mathbb{P}(H > 10 \mid X < 3)$.

c) Calcule $\mathbb{E}(H|X = 3)$.

P7. Una fuente luminosa produce en un punto dado una iluminación L dada por:

$$L = \frac{I}{R^2}$$

donde I: intesidad luminosa de la fuente, y R: distancia del punto a la fuente. Suponga que I y R son v.a. independientes, y tales que $I \sim U(1, 2)$ y $R \sim exp(1)$.

a) Calcule $\mathbb{P}(L > 1|I > 1{,}5)$.

b) Usando T.C.V. determine la densidad de L.

c) Calcule la iluminación promedio de puntos ubicados a dos unidades de distancia.

P8. a) Las primeras 5 repeticiones de un experimento cuestan 10[UM] c/u. Las siguientes cuestan 5[UM] c/u. El experimento debe repetirse hasta que se obtenga el primer éxito. Si la probabilidad de éxito es 0.9 y si las repeticiones son independientes, determine el costo promedio total de la operación.

b) Al revisar un lote de 10 motores este es totalmente rechazado o vendido, dependiendo del siguiente procedimiento: dos motores elegidos al azar se inspeccionan; si al menos un es defectuoso el lote es rechazado, en otro caso es aceptado. Suponga que cada motor cuesta 75[UM] y de vende en 100[UM]. Si el lote contiene 2 motores defectuosos, calcule la utilidad esperada del constructor.

P9. La duración T (en horas) de cierta máquina, es una v.a. exponencial de parámetro λ. La máquina tiene costos de funcionamiento de C_1[UM] por hora y produce, mientras funciona, un ingreso de C_2[UM] por hora. Para operar la máuina se requiere un especialista que cobre C_3[UM] por hora y exige ser contratado por un número prefijado de horas (H). El pago del especialista es independiente de si la máquina esta o no en funcionamiento.

a) Sea U la v.a. que denota la utilidad obtenida por el uso de la máquina. Plantee U en función de los datos entregados.

b) Determine H de tal forma de maximizar la utilidad esperada.

c) Suponga que λ =0.01, $C_1 = 6$, $C_2 = 20$, $C_3 = 4$ y que $H = 60$ (no es el óptimo de la parte 2). Determine la distribución de probabilidades de la v.v. U.

P10. Sea X v.a., y $H(X) = e^{tX}$, $t \in \mathbb{R}$ fijo. Se define la función generadora de momentos (f.g.m.) como

$$M_X(t) = \mathbb{E}(H(X)) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

a) Caclule $M_X(t)$, para $X \sim Bin(n,p)$, y $X \sim exp(\lambda)$

b) Determine $\left.\dfrac{\partial^n M_X(t)}{dt^n}\right|_{t=0}$ $\forall\ n$

c) Sean X, Y v.a. indep, con f.g.m. $M_X(t)$, $M_Y(t)$ respectivamente, y sea $Z := X + Y$. Determine $M_Z(t)$ en función de $M_X(t)$ y $M_Y(t)$.

P11. *a*) Sea X v.a. discreta con $R_X = \mathbb{N}$. Muestre que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

b) Sea X una v.a. continua con $R_X = \mathbb{R}^+$ y una función de distribución $F(\cdot)$. Muestre que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx$$

Utilice esto para mostrar que

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_0^{\infty} nx^{n-1} P\left(X > x\right) dx$$

[*Ind:* Realice el cambio de variable $t = xn$.]

c) Sea X una v.a. cualquiera. Determine d que minimice:

(i) $\mathbb{E}((X-d)^2)$, denominado error cuadrático medio.

(ii) $\mathbb{E}(|X-d|)$, denominado error absoluto medio.

P12. *a*) Sea X e Y variables aleatorias independientes. Muestre que

$$Var(XY) = Var(X)Var(Y) + Var(X)\mathbb{E}(Y)^2 + Var(Y)\mathbb{E}(X)^2$$

b) Paula y Pedro quieren cortar una pieza rectangular de un papel. Como ellos son probabilistas deciden determinar la forma exacta de su rectángulo usando la realización de una variable aleatoria positiva U. Pedro, como es flojo, considera una única realización de su v.a. y por lo tanto corta un cuadrado de lados igual al valor que tomó U. Paula, por su parte, consideró dos realizaciones independientes de U, una para el largo y otra para el ancho de su rectángulo. Calcule las esperanzas de las áreas de los rectángulos e indique cuál es mayor.

c) En un juego usted gana un partido con probabilidad p. Cuando usted gana, su capital se duplica y cuando pierde se reduce a la mitad. Si comienza con $C(UM$ de capital y juega n partidos. Calcule la esperanza de la utilidad.

P13. *a*) Una variable aleatoria X se dice positiva si $\mathbb{P}(X > 0) = 1$. Sean $X_1, ..., X_n$ v.a.'s i.i.d. y positivas. Pruebe que

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1 + ... + X_k}{X_1 + ... + X_n}\right) = \frac{k}{n}$$

b) Si X es una v.a. t.q. $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, muestre la desigualdad de Markov:

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t} \quad \forall t > 0$$

Obs: Suponga X continua.

c) Sea (X, Y) vector aleatorio con densidad

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-x/y}e^{-y} & 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Calcule $\mathbb{E}(X|\ Y = y)$.

P14. Considere una v.a. X con distribución Beta de parámetros α, β ($X \sim Be(\alpha, \beta)$), esto es,

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha - 1}(1 - x)^{\beta - 1}$$

a) Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $Var(X)$.

b) Sean $Y_1 \sim Gamma(\alpha_1, \beta)$, $Y_2 \sim Gamma(\alpha_2, \beta)$ v.a. independientes. Muestre que $U = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \sim Be(\alpha_1, \alpha_2)$ y que U es independiente de $V = Y_1 + Y_2$.

c) Suponga que la proporción X de artículos defectuosos, en un gran lote, es desconocida y que $X \sim Be(\alpha, \beta)$. Si se selecciona al azar un artículo del lote, ¿cuál es la probabilidad que sea defectuoso?