

PAUTA CONTROL 1

MA3403 - PROBABILIDADES Y ESTADISTICA

PROFESOR: FERNANDO LEMA

AUXILIARES: MARTÍN CASTILLO & JOSÉ CERECEDA

11 DE SEPTIEMBRE DE 2014

P1. Una familia de 6 integrantes (4 adultos y 2 niños) va a comer a un restaurante y se sientan en una barra uno al lado del otro.

- a) **(0.75 pt)** De cuantas maneras se pueden sentar si los niños no pueden quedar en las esquinas ni quedar juntos?

Solución: Para esto es útil construir nuestro espacio $\Omega = \{(x_1, \dots, x_6 | 2\text{coord sean } N_i \text{ y } 4\text{coord sean } A_i)\}$ que los niños no queden juntos ni en las esquinas, fijamos a dos adultos en cada esquina, de esta forma estamos viendo las tuplas de la forma $(A, x_2, \dots, A)$ y hay que ver las combinaciones que existen de combinar los niños dentro de los adultos que hay entre x_2, x_5 , y esto es $\binom{4}{2}$, y a este número hay que quitarle la posibilidad de que ambos niños queden juntos, esto es similar a contar ambos niños juntos como un único elemento, esto es $\binom{3}{1}$ y se puede hacer de $4! \cdot 2!$ veces distintas. Luego el cálculo buscado es

$$4!2! \left(\binom{4}{2} - \binom{3}{1} \right)$$

- b) **(0.75 pt)** Como cambia la respuesta anterior si los adultos y niños son clones?

Solución: Análogo a lo anterior, se tiene que las posibles combinaciones son:

$$\left(\binom{4}{2} - \binom{3}{1} \right)$$

- c) **(1.5 pt)** Se ofrecen 9 tipos de entradas y la familia decide pedir 4 para compartir. De cuantas maneras se pueden pedir si:

- 1) No se pueden repetir entradas.

Solución: Mediante el principio multiplicativo, se tiene que la primera entrada tiene 9 formas de ser elegidas, mientras que la segunda tiene $(9 - 1)$ formas ya que no se puede repetir la primera, y así sucesivamente, lo que nos da que se puede pedir de $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ formas distintas si el orden en los que pedimos fuera un factor, pero como el orden no nos importa entonces, observamos que cada configuración la estamos contando $4!$ veces. Y así nos da

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!}.$$

Otra forma más simple es notar que tenemos que ver de cuantas formas podemos elegir 4 elementos de un total de 9 lo cual es:

$$\binom{9}{4}$$

que es lo mismo que lo calculado en lo anterior.

- 2) Se pueden repetir entradas.

Solución: Definimos C_k , con $k \neq 1$ como la cantidad de formas en que se puede pedir 4 entradas de entre las 9 opciones, con la restricción de que k entradas sean iguales. Luego:

- $C_0 = \binom{9}{4}.$
- $C_2 = 3 \cdot \binom{9}{3}$
- $C_3 = 2 \cdot \binom{9}{2}$
- $C_4 = \binom{9}{1}$

- Cantidad de formas en que se puede pedir 4 entradas en las cuales hay un par de entradas que se repiten $= \binom{9}{2}$.

Entonces el valor buscado es:

$$\binom{9}{4} + 3 \cdot \binom{9}{3} + 2 \cdot \binom{9}{2} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2}.$$

- d) (1.5 pt) Cada familiar pide un plato de fondo y el restaurante los asigna al azar de entre los 10 tipos disponibles. Calcule la probabilidad de que todos reciban platos distintos.

Solución: Si ordenamos a la familia notamos que el primero puede recibir 10 platos, el segundo 9, y así sucesivamente. Luego la probabilidad buscada es:

$$\frac{10}{10} \frac{9}{10} \frac{8}{10} \frac{7}{10} \frac{6}{10} \frac{5}{10} = \frac{10!}{4! \cdot 10^6}.$$

- e) (1.5 pt) Después de cenar la familia se va, en grupos de a 2, en 3 colectivos. Si se suben al azar, calcule la probabilidad de que los chicos se vayan juntos.

Solución: Si ordenamos los 3 taxis. Y fijamos que los 2 niños se vayan en el primero entonces estos se pueden sentar de $2!$ formas posibles. Luego en el resto de los 4 asientos los adultos se pueden sentar de $4!$ formas distintas. Y finalmente hay que considerar que los chicos (vistos como una dupla) se pueden ir en cualquiera de los 3 taxis lo cual se puede hacer de 3 formas distintas. Luego la probabilidad buscada es:

$$\frac{2! \cdot 4! \cdot 3}{6!} = \frac{1}{5}.$$

- P2.** a) Un juego de video consta n etapas de forma tal que la etapa i -ésima es superada con probabilidad p_i si la anterior fue superada y con probabilidad $\frac{p_i}{2}$ si la anterior no fue superada. En cuanto a la primera etapa esta es superada con probabilidad α . Si $n = 3$.

- 1) (1 pt) Plantee un diagrama y el espacio muestral que representa el juego.

Solución: Espacio muestral:

$$\Omega = \{(E_1, E_2, E_3) \in \{P, N\}^3\}.$$

Donde P representa "pasar la etapa" N representa "no pasar la etapa".

- 2) (1 pt) Suponga que pasa la etapa 3. Cual es la probabilidad de que haya pasado la etapa 1?

Solución: Primero usamos Bayes:

$$\mathbb{P}(E_1 = P | E_3 = P) = \mathbb{P}(E_3 = P | E_1 = P) \cdot \frac{\mathbb{P}(E_1 = P)}{\mathbb{P}(E_3 = P)}.$$

Identificamos cada termino:

- $\mathbb{P}(E_1 = P) = \alpha$.
- $\mathbb{P}(E_3 = P | E_1 = P) = p_3 p_2 + \frac{p_3}{2}(1 - p_2)$.
- $\mathbb{P}(E_3 = P) = \alpha(p_3 p_2 + \frac{p_3}{2}(1 - p_2)) + (1 - \alpha)(\frac{p_2}{2} p_3 + (1 - \frac{p_2}{2}) \frac{p_3}{2})$.

Reemplazando se obtiene la probabilidad buscada.

- 3) (1 pt) Si un jugador paso al menos una de las 3 etapas. Calcule la probabilidad que haya ganado por primera vez en la etapa 2?

Solución: Aquí ocupamos la definición de probabilidad condicionada:

$$\mathbb{P}(E_1 = N, E_2 = P | \underbrace{\text{paso al menos una etapa}}_X) = \frac{\mathbb{P}(\{E_1 = N\} \cap \{E_2 = P\} \cap X)}{\mathbb{P}(X)}.$$

Ahora hay que darse cuenta que si gane en la etapa 2 entonces pase a menos una de las 3 etapas. En términos de conjuntos esto significa que: $\{E_2 = P\} \subseteq X$. Entonces al intersectar notamos que $\{E_2 = P\} \cap X = \{E_2 = P\}$. Entonces:

$$\mathbb{P}(E_1 = N, E_2 = P | X) = \frac{\mathbb{P}(\{E_1 = N\} \cap \{E_2 = P\})}{\mathbb{P}(X)} = \frac{\mathbb{P}(E_1 = N, E_2 = P)}{\mathbb{P}(X)}.$$

Calculamos cada parte:

- $\mathbb{P}(E_1 = N, E_2 = P) = (1 - \alpha) \frac{p_2}{2}$.
- Notamos que para X es más fácil calcular el complemento y obtenemos:

$$1 - \mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(\text{no ganar ninguna etapa}) = (1 - \alpha)(1 - \frac{p_2}{2})(1 - \frac{p_3}{2}).$$

Así la probabilidad buscada es:

$$\mathbb{P}(E_1 = N, E_2 = P | \text{paso al menos una etapa}) = \frac{(1 - \alpha) \frac{p_2}{2}}{1 - (1 - \alpha)(1 - \frac{p_2}{2})(1 - \frac{p_3}{2})}.$$

- 4) (1 pt) Si $p_i = p, \forall i$. Y se define:

$$P(n) = \mathbb{P}(\text{jugador pase la } n\text{-ésima etapa}).$$

Muestre que:

$$P(n+1) = \frac{p}{2} \cdot P(n) + \frac{p}{2}.$$

Solución: Usamos probabilidades totales condicionando con respecto a la etapa anterior:

$$\begin{aligned} P(n+1) &= \mathbb{P}(E_{n+1} = P) = \mathbb{P}(E_{n+1} = P | E_n = P) \mathbb{P}(E_n = P) + \mathbb{P}(E_{n+1} = P | E_n = N) \mathbb{P}(E_n = N) \\ &= p \cdot P(n) + \frac{p}{2} \cdot (1 - P(n)) = \frac{p}{2} P(n) + \frac{p}{2}. \end{aligned}$$

- b) Un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ se dice Egocéntrico si $|A| \in A$. Por ejemplo, el conjunto $\{2, 7\}$ es Egocéntrico pero el conjunto $\{1, 3\}$ no.

- 1) (1 pt) Calcule cuantos egocéntricos $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ de tamaño k existen. Con k un número fijo entre 1 y n .

Solución: Como $|A| = k$ entonces necesariamente $k \in A$. El resto de los $k - 1$ elementos de A los tenemos que elegir de entre los $n - 1$ números restantes, lo cual se puede hacer de $\binom{n-1}{k-1}$ formas distintas, que es la cantidad buscada.

- 2) (1 pt) Muestre que la cantidad de egocéntricos $A \subseteq \{1, \dots, n\}$, son 2^{n-1} .

Solución: Primero notamos que los subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$ pueden tener tamaño entre 1 y n por lo tanto el total de egocéntricos se calcula como la suma de todos los egocéntricos de todos los tamaños posibles. Esto es:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 1^k \cdot 1^{n-1-k} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

P3. a) Considere X v.a. discreta tal que

$$\mathbb{P}(X = r) = k(1 - \beta)^{r-1} \quad \forall r \in \mathbb{N} - \{0\}$$

- 1) Qué condiciones debe satisfacer β ?

Solución: Primero queremos que nuestra probabilidad se encuentre en $(0,1)$, por lo que β debe cumplir que $\beta \in (0,1)$

- 2) Determinar la constante k

Solución: Tenemos primero que

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(X \in \mathbb{N} - \{0\}) \\ &= \sum_{r \geq 1} \mathbb{P}(X = r) \\ &= \sum_{r \geq 1} k(1 - \beta)^{r-1} \\ &= k \sum_{r \geq 1} (1 - \beta)^{r-1} \\ &= k \frac{1}{1 - (1 - \beta)} \\ &= k \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

Luego $k = \beta$.

3) Encuentre el valor más probable para X

Solución: Notando que $(1 - \beta) \in (0, 1)$ entonces se tiene que la función $(1 - \beta)^r$ es una función decreciente con respecto a r , por lo que el valor más grande que toma $\beta(1 - \beta)^{r-1}$ es en el mínimo de los r que puede tomar. Luego el valor más probable es $\mathbb{P}(X = 1) = 1/\beta$

4) Encuentre la mediana de la v.a. X

Solución: Para encontrar la mediana, debemos imponer

$$\mathbb{P}(X \geq n^*) \geq \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(X \leq n^*) \geq \frac{1}{2}$$

escribiendo esto, de manera explícita, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq n^*) &= \sum_{1 \leq r \leq n^*} \mathbb{P}(X = r) \\ &= \sum_{1 \leq r \leq n^*} \beta(1 - \beta)^{r-1} \\ &= \beta \frac{1 - (1 - \beta)^{n^*}}{\beta} \\ &= 1 - (1 - \beta)^{n^*} \end{aligned}$$

De igual manera

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq n^*) &= \sum_{r \geq n^*} \mathbb{P}(X = r) \\ &= \sum_{r \geq n^*} \beta(1 - \beta)^{r-1} \\ &= \sum_{r \geq n^*-1} \beta(1 - \beta)^{r-(n^*-1)+n^*-1} \\ &= \beta(1 - \beta)^{n^*-1} \sum_{r \geq 0} \beta(1 - \beta)^r \\ &= \beta(1 - \beta)^{n^*-1} \frac{1}{1 - (1 - \beta)} \\ &= (1 - \beta)^{n^*-1} \end{aligned}$$

Lo que nos dice que la mediana debe cumplir que $(1 - \beta)^{n^*} \leq 1/2 \leq (1 - \beta)^{n^*-1}$ aplicando logaritmos a esto tendremos que

$$\begin{aligned} (1 - \beta)^{n^*} &\leq 1/2 \leq (1 - \beta)^{n^*-1} \\ n^* \log(1 - \beta) &\leq \log(1/2) \leq (n^* - 1) \log(1 - \beta) \\ \frac{\log(\frac{1-\beta}{2})}{\log(1 - \beta)} &\geq n^* \geq \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(1 - \beta)} \end{aligned}$$

5) Considere $t \in (0, 1), r \in \mathbb{N}$ calcule $\mathbb{P}(X > r + t | X \geq r)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X > r + t | X \geq r) &= \frac{\mathbb{P}(X > r + t \cap X \geq r)}{\mathbb{P}(X \geq r)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(X > r + t)}{\mathbb{P}(X \geq r)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(X \geq r + 1)}{\mathbb{P}(X \geq r)} \\
 &= \frac{\sum_{n \geq r+1} \beta(1 - \beta)^{n-1}}{\sum_{n \geq r} \beta(1 - \beta)^{n-1}} \\
 &= \frac{(1 - \beta) \sum_{n \geq r} \beta(1 - \beta)^{n-1}}{\sum_{n \geq r} \beta(1 - \beta)^{n-1}} \\
 &= 1 - \beta
 \end{aligned}$$

b) **(1.5 pt)** Suponga que quiere elegir un numero natural ($\mathbb{N}$) al azar (i.e. todos sean equiprobables). Es esto posible? Comente.

Solución: Intuitivamente lo que queremos hacer es encontrar una v.a. X cuyo rango sea $\mathbb{N}$. Y que cumpla con la propiedad:

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = i) = p, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Si suponemos que existe esta v.a. X , por las propiedades de la probabilidad sabemos que $p \in [0, 1]$. Y por otro lado sabemos que la probabilidad del espacio entero tiene que ser 1. Así:

$$\mathbb{P}(X \in \mathbb{N}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{\infty} p = \begin{cases} \infty, & \text{si } p > 0 \\ 0, & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto en ninguno de los 2 casos da uno por lo que llegamos a una contradicción lo cual nos dice que no puede existir una v.a. con la propiedad deseada.