

AUXILIAR 5: V.A. N-DIMENSIONALES

MA3403 - PROBABILIDADES Y ESTADISTICA

PROFESOR: FERNANDO LEMA

AUXILIARES: MARTÍN CASTILLO - JOSÉ CERECEDA

11 DE SEPTIEMBRE DE 2014

Resumen.

Teorema de Cambio de Variables bi-dimensional

Sea (X, Y) una v.a. bidimensional con función de densidad conjunta $f_{X,Y}$. Sean $Z = H_1(X, Y)$, $W = H_2(X, Y)$ funciones tales que satisfacen:

- (i) $z = H_1(x, y) \wedge w = H_2(x, y)$ tienen solución única para x, y en función de z, w . Esto es,
 $x = G_1(z, w)$, $y = G_2(z, w)$
- (ii) $\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial w}$ existen y son continuas.

Entonces,

$$f_{Z,W}(z, w) = f_{X,Y}(G_1(z, w), G_2(z, w)) |J(z, w)|$$

donde $J(z, w)$ corresponde al Jacobiano de la transformación, ie,

$$J(z, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Problemas.

P1. Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a. independientes continuas con densidad $f_{X_i} = f_X \forall i$. Calcule la función densidad de las v.a. $Z_1 = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $Z_2 = \min\{X_1, \dots, X_n\}$, ¿Qué ocurre con Z_2 cuando $X_i \sim \exp(\lambda)$.

P2. Calcule la densidad de la v.a. $Z = \frac{X}{Y}$. Con $X, Y \sim U(0, 1)$.
propuesto: Considere $X, Y \sim \exp(1)$.

P3. Teorema de probabilidades totales, v.a. continuas y discretas

- a) Sea X v.a. con densidad $f_X(x)$. Y v.a. discreta tal que $\mathbb{P}(Y = y_j | X = x)$ es conocida. Mostrar conceptualmente que

$$\mathbb{P}(Y = y_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(Y = y_j | X = x) f_X(x) dx$$

- b) Sea X v.a. discreta con probabilidad $\mathbb{P}(X = x_j)$. Y v.a. continua con densidad condicional $f_{Y|X}(y|x)$ conocida. Mostrar conceptualmente que

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = x_i) f_{Y|x_i}(y|x_i)$$

P4. Sea $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ una sucesión de v.a. independientes tales que $X_i \sim \text{Bin}(1, p) \forall i$. Sea además

$N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ independiente de $X_i \forall i$. Calcule $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^N X_i = k\right) \quad \forall k$.

P5. Considere una barra de largo L , realice un primer corte de forma uniforme, digamos en X , y haga un segundo corte una vez realizado este, digamos Y tal que $X < Y < L$. Se puede considerar entonces que $X \sim U(0, L)$, $Y|X \sim U(x, L)$. Encuentre la función de densidad de Y , ¿Qué ocurre con $L \rightarrow 0$?