

AUXILIAR 4

MA3403 - PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA

PROFESOR: FERNANDO LEMA

AUXILIARES: MARTIN CASTILLO & JOSÉ CERECEDA

3 DE SEPTIEMBRE DE 2014

Resumen

Teorema de Cambio de Variables: Sea X una variable aleatoria continua. Sea $\varphi : X(\Omega) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable e inyectiva. Si $Y = \varphi(X)$ y la densidad de X es f_X , entonces:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} f_X(\varphi^{-1}(y))$$

Función de Densidad. Sea X una variable aleatoria continua. Su función de densidad asociada, denotada f_X , es aquella tal que $F_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x) dx$.

Problemas

- P1.** (Poisson Filtrada) Considere el siguiente experimento, usted cuanta cuantos autos pasan por una calla durante cierto intervalo de tiempo, esto se puede modelar por una v.a. con distribución de poisson, de algún parametro, Ahora usted ve una bifurcación que pueden tomar los autos, y se van hacia la derecha con probabilidad p y hacia la izquierda con probabilidad $(1 - p)$, suponga que ahora quiere contar cuantos autos toman el camino de la derecha. Cual es su función de distribución?
- P2.** Suponga que lanza una particula con un angulo con respecto a la horizontal, y el angulo depende de la emisión de manera aleatoria, suponga que el angulo α , sigue una distribución tal que su función densidad esta descrita por

$$f_\alpha(\alpha) = \frac{2}{\pi} \left\{ \log\left(\frac{\pi}{2}\right) - \log\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right\}$$

para $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

ahora quiere ver que distribución sigue la v.a. definida como la altura a distancia 1 del origen con respecto a la horizontal.

- P3.** Sea (X, Y) vector aleatorio, tal que $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & 0 < x, y < \infty \\ 0 & \sim \end{cases}$ Calcule $\mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} \leq a\right)$ para todo a .

- P4.** Considere X v.a. absolutamente continua, demostrar que

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$$

y $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X > h) - 1}{h} < \infty$ si y solo si $X \sim \exp(\alpha)$.

NOTA: Una $X \sim \exp(\alpha)$ es tal que su función de densidad es $f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ para $x > 0$ se tiene que su función de distribución $F_X(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ para $x > 0$.