Variables Aleatorias

MA3403 - Probabilidades y Estadistica
Profesor: Fernando Lema
Auxiliar: Martín Castillo - José Cereceda
21 de agosto de 2014

1. Introducción

Informalmente se define una variable aleatoria (v.a.) como una "característica num+eroca" medida en un experimento aleatorio. E.j. calcular el peso de una persona

Definición **1.1** *Sea* **E** *un experimento aleatorio,* Ω *el espacio muestral asociado, se define una variable aleatoria* X *como*

$$
\begin{aligned}
X : \Omega &\to \mathbb{R} \\
\omega &\mapsto X(\omega) = x
\end{aligned}
$$

Se dice $R \subseteq \mathbb{R}$ *el recorrido de* X*.*

Nota:

1. La razón fundamental para la definición de v.a. es trabajo con conjuntos numéricos (modelar).
2. Para que una función X quede bien definida como v.a. debe exigirse que la preimagen de subjontunos de $\mathbb{R}$ tengan probabilidades bien definidas en Ω.
3. En muchas ocaciones $X = I$ (función identidad).

Dependiendo de la cardinalidad de R_X se distinguen dos casos.

a) SI R_X es numerable, X se dice v.a. discreta.

b) SI R_X es no numerable, X se dice v.a. continua.

Definición **1.2** *Sea* X *v.a.* $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq R_X$, *se dice que* AyB *son eventos equivalentes* ($A \equiv B$) *si y solo si*

$$A = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$$

Consecuentemente con lo anterior, si los llamamos eventos equivalentes, ambos deben tener la misma probabilidad, i.e. si $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq R_X$, $A \equiv B \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$, veamos un ejemplo.

Considerar el experimento de lanzar una moneda dos veces, entonces nuestro espacio muestral esta dado por $\Omega = \{(C,C),(C,S),(S,C),(S,S)\}$ y definimos la v.a. X como la cantidad de sellos obtenidos $X : \Omega \to \{0,1,2\}$, mediante esta definición es claro que, el evento $A = \{X = 1\}$ es equivalente a $B = \{(C,S),(S,C)\}$.

2. Variables Aleatorias Discretas

Sea X una v.a. discreta, es decir, cuyo recorrido R_X se puede denotar por $R_X = x_1, x_2, x_3, ...$, denotaremos por $p(x_i) = p_{x_i} = p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$, entonces por los axiomas de probabilidad vistos, se tiene que se cumple

1. $p(x_i) \geq 0$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$
3. Sea $B \subseteq R_X \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \displaystyle\sum_{x_i | x_i \in B} P(x_i)$

Definición **2.1** *El conjunto* $\{(x_i, P(x_i))\}_{i=1}^{\infty}$ *se denomina la distribución de probabilidades de* X

En el ejemplo anterior ésta es

$$\{\left(0, \frac{1}{4}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(2, \frac{1}{4}\right)\}$$

3. Ejemplos importantes de v.a. discreta

3.1. Experimento de Bernoulli

Se dice que un experimento E es de Bernoulli si este tiene solo dos resultados posibles. Es decir se puede representar por espacios del estilo $(V, F)(1, 0)(A, \overline{A})$ Si la probabilidad delecito enel experimento es $P(V) = P(1) = P(A) = p \in [0, 1]$ se dice que la v.a. es de parámetro p

3.2. Distribución binomial (modelo)

Suponga un experimento de Bernoulli (E, F) (exito,fracaso), de parámetro p y supongamos que este experimento se repite n veces en forma independiente. Definimos X v.a. como la cantidad de exitos obtenidos en las n repeticiones

$$R_X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$
$$\Omega = \{(X_1, X_2, \ldots, X_n) | X_i \in \{E, F\}\}$$

Y se tiene que $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Una v.a. como esta se dice que tiene distribución binomial de parámetros n, p y se denota por

$$X \sim B(n, p)$$

Nota: Observar que

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$$