Pauta Auxiliar 2: Probabilidad condicional e independencia

MA3403 - Probabilidades y Estadística
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Martin Castillo & José Cereceda
28 de Marzo, 2014

Resumen

Definición: Sean A, B eventos tales que $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilidad de A condicionado por B se define por:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Propiedades: A continuación, las más relevantes:

1. **Fórmula de Bayes:** Dados A, B eventos, se tiene que:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

2. **Probabilidades Totales:** Sea Ω un espacio muestral y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ partición de Ω, entonces:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A|A_n)\mathbb{P}(A_n)$$

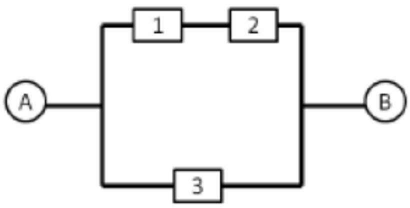
3. **Multiplicación de Probabilidades:** Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos, entonces:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{n} \mathbb{P}(A_i|A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1}) = \mathbb{P}(A_n)\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i|A_{i+1} \cap \cdots \cap A_n)$$

Definición: Diremos que dos eventos A y B son independientes si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Problemas

P1. Considere que en el circuito de la figura las componentes 1, 2 y 3 tienen una probabilidad p de funcionar, y $1 - p$ de fallar, y lo hacen de forma independientes.



a) Calcule la probabilidad de que no exista flujo de A a B.

b) Calcule la probabilidad de que 1 esté bueno, sabiendo que hay flujo.

P2. Un estudio entrega la siguiente información con respecto al actuar de los tribunales de justicia: cuando el acusado es culpable el tribunal lo declara culpable con probabilidad 0.7, inocente con probabilidad 0.2 y se declara incompetente con probabilidad 0.1. Cuando el acusado es inocente las probabilidades cambian a 0.1, 0.8 y 0.1 respectivamente. En el caso de incompetencia se pasa a un tribunal superior que actúa como el primero pero con probabilidades 0.8, 0.2, 0 y 0.5, 0.5, 0 respectivamente. Se sabe que el 60 % de los acusados es culpable.

a) Calcule la probabilidad de que un individuo culpable sea declarado culpable y que un inocente sea declarado inocente.

b) Calcule la probabilidad de que un individuo declarado culpable lo sea realmente.
Solución: Denotaremos al evento I_c como el individuo es culpable, y I_i como el individuo es inocente mientras que por D_c, D_i, D_{inc} a los eventos en que el tribunal declara culpable, inocente, e incompetente respectivamente. En este caso lo que deseamos probar es $PP\left(I_c|D_c\right)$ luego utilizando el teorema de Bayes se tiene que

$$\mathbb{P}\left(I_c|D_c\right) = \mathbb{P}\left(D_c|I_c\right)\frac{\mathbb{P}\left(I_c\right)}{\mathbb{P}\left(D_c\right)}$$

La probabilidad $\mathbb{P}\left(D_c|I_c\right) = 0{,}78$ por la parte (a), mientras que $\mathbb{P}\left(I_c\right) = 0{,}6$ de acuerdo al enunciado. Nos falta por calcular $\mathbb{P}\left(D_c\right)$ y esto lo haremos utilizando el teorema de probabilidades totales.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(D_c\right) &= \mathbb{P}\left(D_c|I_c\right)\mathbb{P}\left(I_c\right) + \mathbb{P}\left(D_c|I_i\right)\mathbb{P}\left(I_i\right)\\ &= (\mathbb{P}\left(D_c en\, 1^o\, instancia|I_c\right) + \mathbb{P}\left(D_c en\, 2^o\, instancia|I_c\right))\mathbb{P}\left(I_c\right)\\ &+ (\mathbb{P}\left(D_c en\, 1^o\, instancia|I_i\right) + \mathbb{P}\left(D_c en\, 2^o\, instancia|I_i\right))\mathbb{P}\left(I_i\right)\\ &= (0{,}7 + 0{,}1\cdot 0{,}8)\cdot 0{,}6 + (0{,}1 + 0{,}1\cdot 0{,}5)\cdot 0{,}4\end{aligned}$$

Luego la $\mathbb{P}(I_c|D_c) \sim 0{,}78\cdot\frac{0{,}6}{0{,}53} \sim 0{,}88$

c) Consideremos las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}\text{Error de tipo I} &= \text{declarar culpable a un inocente}\\ \text{Error de tipo II} &= \text{declarar inocente a un culpable}\end{aligned}$$

Determine el porcentaje de error de cada tipo.
Solución: Para calcular el porcentaje de error, solo basta ver los casos posibles, al igual que en la parte (a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\text{Error tipo I}\right) &= \mathbb{P}\left(D_c|I_i\right)\\ &= \mathbb{P}\left(D_c\, en\, 1^o\, instancia|I_n\right) + \mathbb{P}\left(D_c\, en\, 2^o\, instancia|I_n\right)\\ &= 0{,}1 + 0{,}1\cdot 0{,}5\\ &= 0{,}15\end{aligned}$$

Para el Error de tipo 2, se procede de igual manera y se obtiene que $\mathbb{P}\left(D_i|I_c\right) = 0{,}2 + 0{,}1\cdot 0{,}5 = 0{,}25$

P3. Considere n urnas, cada una de ellas contiene α esferas blancas y β esferas negras. Se pasa una esfera de la urna 1 a la urna 2 y *luego* se pasa una de la urna 2 a la urna 3, etc. Finalmente se escoge una esfera en la urna n. Si la primera esfera que se pasó era blanca, ¿Cuál es la probabilidad de que la última esfera elegida sea blanca? ¿Qué sucede cuando $n \to \infty$?

[**Indicación:** sea $p_n = \mathbb{P}\left(n - \text{ésima esfera pasada sea blanca}\right)$, y exprese p_n en función de p_{n-1}]

Solución: Notar que en la extracción en la urna n, depende del color de la esfera se ingreso (o equivalentemente, que esfera se saco en la urna $n - 1$), por lo que podemos analizar el eveno de sacar una esfera blanca segun dos casos.

$$
\begin{aligned}
p_n = \mathbb{P}\left(\text{Sacar una esfera B en la urna } n\right) &= \mathbb{P}\left(\text{Sacar una esfera B}|\text{en la instancia } n-1 \text{ se saco una B }\right)\\
&\cdot \mathbb{P}\left(\text{en la instancia } n-1 \text{ se saco una B }\right)\\
&+ \mathbb{P}\left(\text{Sacar una esfera B}|\text{en la instancia } n-1 \text{ se saco una N }\right)\\
&\cdot \mathbb{P}\left(\text{en la instancia } n-1 \text{ se saco una N }\right)\\
&= \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}\cdot p_{n-1} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\cdot(1-p_{n-1})\\
&= \frac{1}{\alpha+\beta+1}\cdot p_{n-1} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}
\end{aligned}
$$

Luego la solución general de la recurrencia es

$$
p_n = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}\right)^{n-1} p_2 + \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\left(\frac{\frac{1}{\alpha+\beta+1}^{n-1}-1}{\frac{1}{\alpha+\beta+1}-1}\right)
$$

$$
p_n = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}\right)^{n-1} p_2 + \alpha\left(\frac{1-\frac{1}{\alpha+\beta+1}^{n-1}}{\alpha+\beta}\right) \tag{1}
$$

donde $p_2 =$ a la probabilidad de extraer una esfera blanca en la segunda instancia, y sabiendo que en la primera instancia se extrajo una blanca, se tiene que $p_2 = \mathbb{P}\left(\text{extraer B en la 2 urna}\right) = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}$.
Por último, tomando el límite de $n \to \infty$ en 1 se concluye que $p_n \to \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

P4. Suponga que un borrachito da un paso a la derecha con probabilidad p y un paso a la izquierda con probabilidad $1-p$. Para modelar la trayectoria que sigue el borrachito supondremos que se posiciona sobre un núumero entero, comenzando en el origen. Encuentre la probabilidad de que caiga en la posición $k \in \mathbb{Z}$ luego de n saltos.

Solución:

Primero supondremos $n \geq k \geq 0$, el caso contrario es análogo.

Segundo, debemos notar que el borrachito caera en la posición k, si da k pasos a la derecha y el resto de pasos $(n-k)$ son distribuidos de igual manera hacia la izquierda y la derecha, es decir $\frac{n-k}{2}$ pasos son hacia la izquierda y $\frac{n-k}{2}$ pasos a la derecha, esto nos indica para que este evento ocurra $\frac{n-k}{2}$ debe ser un número entero, por lo que n y k deben tener la misma paridad.

Resumiendo lo anterior, tenemos que para que el borrachito caiga en la posición k debe dar $k + \frac{n-k}{2} = \frac{n+k}{2}$ hacia la derecha y $\frac{n-k}{2}$ hacia la izquierda, pero el borrachito puede dar esa cantidad de pasos de distintas maneras, por lo que tambien hay que contabilizar las combinaciones posibles de los pasos.

Por último nos queda calcular las combinaciones posibles, fijandonos que debemos combinar los pasos dados hacia la derecha (o hacia la izquierda) dentro de los n pasos son $\binom{n}{\frac{n+k}{2}}$ (o $\binom{n}{\frac{n-k}{2}}$), notar que ambos numeros combinatoriales son iguales, solo que el primero indica las combinaciones de pasos hacia la derecha sobre los pasos totales, mientras que el segundo indica las combinaciones de pasos hacia la izquierda sobre los pasos totales.

Y como cada paso es independiente del otro se tiene que si $n \geq k \geq 0$ y n y k tienen la misma paridad, entonces

$$
\mathbb{P}\left(borrachito\, caiga\, en\, k\right) = \mathbb{P}\left(pasos\, D\right)^{\frac{n+k}{2}}\mathbb{P}\left(\, pasos I\right)^{\frac{n-k}{2}}\cdot\binom{n}{\frac{n+k}{2}} = p^{\frac{n+k}{2}}(1-p)^{\frac{n-k}{2}}\cdot\binom{n}{\frac{n+k}{2}}
$$

Para el caso $-n \leq k \leq 0$ es analogo, por lo que sintetizando todos los casos se tiene que

$$
\mathbb{P}\left(borrachito\, caiga\, en\, k\right) = \begin{cases} 0 & \text{si}|k| > n \quad \vee \quad k, n \text{ tienen paridad distinta}\\ p^{\frac{n+k}{2}}(1-p)^{\frac{n-k}{2}}\cdot\binom{n}{\frac{n+k}{2}} & k \geq 0\\ p^{\frac{n-|k|}{2}}(1-p)^{\frac{n+|k|}{2}}\cdot\binom{n}{\frac{n+k}{2}} & k \leq 0 \end{cases}
$$

Propuesto: Un fugitivo se encuentra en una de n zonas (no conectadas entre sí). La probabilidad de que se encuentre en la i-ésima zona es p_i, y si está ahí y se le busca, se le encuentra con probabilidad α_i.

a) Si se hace una búsqueda en todas las zonas:

(i) Determine la probabilidad de encontrarlo.

(ii) Si no se le encuentra, calcule la probabilidad que esté en la zona 1.
¿Qué pasa con los eventos anteriores si $\alpha_i = \alpha \ \forall i$?

b) Se buscó en la zona j y no se encontró; calcule la probabilidad que esté en la zona $i, \forall i, j$.