Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3002-1 Tópicos en Análisis Convexo
17 de Noviembre de 2014

Clase Auxiliar # 13: Optimización

Profesor: Rafael Correa F., Emilio Vilches G.
Auxiliares: Enzo Aljovin, Christopher Cabezas, Valentina Toro.

Teorema: (Condiciones de KKT) *Suponga que el problema* (P) *posee un mínimo local* $\tilde{x} \in \operatorname{Int} C$*. Si las funciones* f, g_i *(para* $i \in I(\tilde{x})$*) son diferenciables en* $\tilde{x}$ *y si se cumple la condición de* (MF) *entonces, existen multiplicadores* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *tales que*

$$\begin{cases} \nabla_x L(\tilde{x}, \lambda) & = & 0 \\ \lambda_i g_i(\tilde{x}) & = & 0 \\ g_i(\tilde{x}) & \leq & 0 \\ \lambda_i & \geq & 0 \end{cases}$$

donde $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$*, denominada la función Langrangeana asociada a* (P)

El objetivo de esta clase es demostrar el teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) en el caso diferenciable no convexo. Para ello proceda como sigue:

P1. Consideremos una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable y acotada inferiormente. Pruebe que para cada $\varepsilon > 0$, existe $x_e \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\nabla f(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$.

Hint: *Considere* x_ε *un mínimo global de la función* $f + \varepsilon\|\cdot\|$ *y suponga que* $\|\nabla f(x_\varepsilon)\| > \varepsilon$*, pruebe entonces que en ese caso* $f'(x_\varepsilon; d_\varepsilon) < -\varepsilon\|d_\varepsilon\|$ *con* $d_\varepsilon \doteq -\nabla f(x_\varepsilon)$ *y que esto contradice la optimalidad de* x_ε

P2. Demuestre el *Teorema de la Alternativa de Gordan*: dados $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$, uno y sólo uno de los siguientes sistemas (S1) y (S2) admite solución.

(S1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i = 0$ con $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ y $0 \leq \lambda_i$

(S2) $\exists d \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \{0, \ldots, m\} : \quad \langle a_i, d\rangle < 0$

Hint: *Pruebe que si la función* $f(x) = \log\left(\sum_{i=0}^{m} \exp\langle a_i, x\rangle\right)$ *es acotada inferiormente, entonces (S1) tiene una solución*

P3. Sean $g_0, g_1, \ldots, g_m : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones continuas en C y diferenciales en $\tilde{x} \in \operatorname{Int} C$. Se definen

$$g(x) \doteq \max_{0 \leq i \leq m} \{g_i(x)\} \qquad \text{y} \qquad J \doteq \{i \mid g_i(\tilde{x}) = g(\tilde{x})\}$$

Pruebe que $\forall d \in \mathbb{R}^n$:

(a) $\displaystyle\liminf_{t \to 0^+} \frac{g(\tilde{x} + td) - g(\tilde{x})}{t} \geq \langle \nabla g_i(\tilde{x}), d\rangle \quad \forall i \in J$

(b) $\displaystyle\limsup_{t \to 0^+} \frac{g(\tilde{x} + td) - g(\tilde{x})}{t} \leq \max_{i \in J} \{\langle \nabla g_i(\tilde{x}), d\rangle\}$

Hint: *Razone por contradicción, probando que si lo anterior no fuese cierto entonces existirían* $\varepsilon > 0$ *y* $j \in J$ *tales que para una sucesión* $t_k \to 0^+$ *se tendría que*

$$\frac{g(\tilde{x} + t_k d) - g(\tilde{x})}{t_k} \geq \max_{i \in J} \{\langle \nabla g_i(\tilde{x}), d\rangle\} + \varepsilon$$

(c) $g'(\tilde{x}; d) = \max_{i \in J} \{\langle \nabla g_i(\tilde{x}), d \rangle\}$

P4. Considere el siguiente problema de minimización con restricciones:

$$\min \{f(x) \mid g_i(x) \leq 0 \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, m\}, x \in C\} \tag{P}$$

donde $f, g_1, \ldots, g_m : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. Suponga que (P) tiene un minimizador local $\tilde{x} \in \operatorname{Int} C$ y que f, g_i (con $i \in I(\tilde{x}) \doteq \{i \mid g_i(\tilde{x}) = 0\}$) son diferenciables en $\tilde{x}$. Pruebe que

(a) (Condiciones de Fritz-John) Existen $\lambda_0, \lambda_i \in \mathbb{R}_{\leq 0} (i \in I(\tilde{x}))$, no todos nulos, que satisfacen

$$\lambda_0 \nabla f(\tilde{x}) + \sum_{i \in I(\tilde{x})} \lambda_i \nabla g_i(\tilde{x}) = 0 \tag{FJ}$$

Hint: *Verifique que $g'(\tilde{x}; d) \geq 0$ para una función g escogida apropiadamente y luego aplique el Teorema de la Alternativa de Gordan*

(b) (Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker) Si además se satisface la condición de calificación de Mangasarian-Fromovitz:

$$\exists d \in \mathbb{R}^n, \forall i \in I(\tilde{x}) : \quad \langle \nabla g_i(\tilde{x}), d \rangle < 0 \tag{MF}$$

entonces es posible tomar $\lambda_0 = 1$ en (FJ)