Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3002-1 Tópicos en Análisis Convexo
11 de Agosto de 2014

Clase Auxiliar # 2: Espacios de Hilbert y Proyecciones

Profesor: Rafael Correa, Emilio Vilches.
Auxiliares: Enzo Aljovin, Christopher Cabezas, Valentina Toro.

Definición: (Proyección de un punto) *Sea X un e.v.n se define el conjuto de las proyecciones de un punto $\vec{a} \in X$ sobre un conjunto $C \subseteq X$, como todo los puntos $\vec{p} \in C$, tales que*

$$d_C(a) = \|\vec{a} - \vec{p}\|$$

Observación:

- *El conjunto de las proyecciones podría ser vacío.*
- *Las proyecciones pueden no ser únicas. Es por ello, que en general no se puede hablar de "la" proyección.*

Teorema: (Existencia de proyección sobre compactos) *Sea $C \subseteq X$ un conjunto compacto, entonces para todo $x \in X$, el conjunto de sus proyecciones será no vacío.*

Demostración: Sea $x \in X$. Consideremos el mapeo $\|x - \cdot\| : C \to \mathbb{R}$, que es continuo, por ser composición de funciones continuas. Dado que está definida sobre un compacto, se tiene que alcanza su mínimo sobre un punto $p \in C$ y se tendrá por tanto que $d_C(x) = \|x - p\|$ ■

El resultado anterior es válido para cualquier espacio vectorial normado. Ahora, supondremos que X es un espacio de Hilbert y veamos que las hipótesis para el conjunto C se pueden relajar.

Lema: *Sea H un espacio de Hilbert y C un conjunto convexo. Sean $a, b, c \in C$ y $m = \frac{b+c}{2}$. Entonces*

$$\|a - b\|^2 + \|a - c\|^2 = 2\|a - m\|^2 + \frac{1}{2}\|b - c\|^2$$

Demostración: Auxiliar #1. ■

Teorema: *Sea H un espacio de Hilbert y $C \subseteq H$ un conjunto convexo cerrado no vacío. Entonces, todo $a \in X$, tiene una única proyección u sobre C, vale decir*

$$\|a - u\| = \inf_{c \in C} \|a - c\| \tag{1}$$

Más aún, la proyección u está caracterizada por

$$\langle a - u, x - u \rangle \leq 0 \qquad \forall x \in C \tag{2}$$

Demostración: Dado que la distancia $d_C(a)$, está definida como un ínfimo sobre elementos de C. Debe existir una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C$ infimizante, vale decir, que satisface

$$d_C(a) = \lim_k \|x_k - a\|$$

El espíritu es probar que (x_k) converge, pues si $x_k \to \bar{x}$, por ser C un conjunto cerrado, se tendría que $\bar{x} \in C$ y por la continuidad del mapeo $\|a - \cdot\|$, se tendría que $d_C(a) = \|\bar{x} - a\|$. Dado que estamos trabajando en un espacio de Hilbert, para probar la convergencia de una sucesión, hace falta probar que es de Cauchy. Del lema anterior, tomando $b = x_i, c = x_j$, se tiene

$$\begin{aligned}\|x_i - x_j\|^2 &= 2\|a - x_j\|^2 + 2\|a - x_i\|^2 - 4\|a - m\| \\ &\leq 2\|a - x_j\|^2 + 2\|a - x_i\|^2 - 4d_C^2(a)\end{aligned}$$

Dado que la sucesión (x_k) era infimizante, se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \qquad \left| 2\|a - x_k\|^2 - 2d_C^2(a) \right| \leq \varepsilon/2$$

De esto se sigue que tomando $i, j \geq n_0$, se tendrá que $\|x_i - x_j\| \leq \varepsilon$, con lo que se concluye que la sucesión converge a un punto $\bar{x} \in C$, que corresponde a una proyección de a sobre C.

Hasta aquí hemos probado la existencia de la proyección. Antes de probar la unicidad, mostremos la equivalencia entre (1) y (2). Para ello, probemos la doble implicancia.

($\Longrightarrow$) Sea u tal que satisface (1) y sea $w \in C$. Se tiene que

$$v = (1 - \lambda)u + \lambda w \in C \qquad \forall \lambda \in [0, 1]$$

en virtud de la convexidad de C. De lo anterior se sigue que

$$\|a - u\| \leq \|a - [(1 - \lambda)u + \lambda w]\| = \|(a - u) - \lambda(w - u)\|$$

Por lo tanto,

$$\|a - u\|^2 \leq \|a - u\|^2 - 2\lambda\langle a - u, w - u\rangle + \lambda^2\|w - u\|^2$$

Lo que implica que

$$2\langle a - u, w - u\rangle \leq \lambda\|w - u\|^2 \quad \forall \lambda \in (0, 1]$$

Tomado límite $\lambda \to 0$, se obtiene lo pedido.

($\Longleftarrow$) Sea u que satisface (2). Se tiene que

$$\begin{aligned} \|a - x\|^2 &= \|a - u - (x - u)\|^2 \\ &= \|a - u\|^2 \underbrace{-2\langle a - u, x - u\rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\|x - u\|^2}_{\geq 0} \end{aligned}$$

De esto, se tiene que $\|a - x\| \geq \|a - u\| \quad \forall x \in C$, por lo tanto, u es proyección.

Ahora procedamos con la unicidad. Sean u_1, u_2 proyecciones, lo que equivale a que ambas satisfagan (2), es decir

$$\begin{aligned} \langle a - u_1, v - u_1\rangle \leq 0 \quad \forall v \in K \\ \langle a - u_2, v - u_2\rangle \leq 0 \quad \forall v \in K \end{aligned}$$

Eligiendo $v = u_2$ en la primera desigualdad, $v = u_1$ en la segunda y sumando, se obtiene que $\|u_1 - u_2\|^2 \leq 0$. De lo que se concluye que $u_1 = u_2$ ■

Corolario: *Sea $M \subseteq H$ un s.e.v cerrado. Sea $a \in H$, luego la proyección u, de a sobre M, está caracterizada por*

$$\langle a - u, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in M$$

Proposición: *Sea $K \subseteq H$ un convexo cerrado no vacío. Entonces, la aplicación $p_K : H \to K$ que a cada punto le asigna su proyección es Lipschitz de constante 1, es decir,*

$$\|p_K(x) - p_K(y)\| \leq \|x - y\| \qquad \forall x, y \in H$$

Demostración: Usando la caracterización de la proyección (i.e. la desigualdad (2)), se tiene que

$$\begin{aligned} \langle a - u_1, v - p_K(x)\rangle \leq 0 \quad \forall v \in K \\ \langle a - u_2, v - p_K(y)\rangle \leq 0 \quad \forall v \in K \end{aligned}$$

tomando, $v = p_K(y)$ en la primera, $v = p_K(x)$ en la segunda y sumando, se obtiene que

$$\|p_K(x) - p_K(y)\|^2 \leq \langle x - y, p_K(x) - p_K(y)\rangle$$

De lo que sigue $\|p_K(x) - p_K(y)\| \leq \|x - y\|$ ■

Teorema: (Representación de Riesz-Frèchet) *Sea H un espacio de Hilbert y $\varphi : H \to \mathbb{R}$ lineal continua. Entonces, existe un único $u \in H$ tal que*
$$\varphi(x) = \langle u, x\rangle \qquad \forall x \in H$$

Demostración: Si φ es la función nula, la proposición es cierta con $u = 0$. Suponiendo que esto es cierto para un $u \neq 0$, basta con evaluar en u y se tiene que $\varphi(u) = \|u\|^2 = 0$, lo que es una contradicción.

Supongamos que φ es no nula. Dado que es lineal y continua, se tendrá que $M = \mathbb{K}\text{er}\ \varphi = \{x \in H \mid \varphi(x) = 0\}$ es un hiperplano cerrado. Sea $a_1 \in H \setminus M$ y $a_2 = p_M(a_1)$ (notar que esta proyección existe y es única, dado que M es convexo y cerrado), luego definimos
$$g \doteq \frac{a_1 - a_2}{\|a_1 - a_2\|}$$
Se puede comprobar que $\|g\| = 1$ y $\langle g, v\rangle = 0\ \forall v \in M$ (esto se tiene por el corolario visto antes). Sea $x \in H$, definimos
$$v = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(g)} g$$
Notemos que v está bien definido, y más aún $v \in M$ (¿por qué?). Dado que $v \in M$, se tiene que $\langle g, v\rangle = 0$, por lo tanto, de la definición de v, se tiene que
$$\begin{aligned} & \langle g, v\rangle &&= \langle g, x\rangle - \frac{\varphi(x)}{\varphi(g)} \underbrace{\langle g, g\rangle}_{=1} \\ \Longrightarrow\ & \varphi(x) &&= \varphi(g)\langle g, x\rangle \\ \Longrightarrow\ & \varphi(x) &&= \langle \varphi(g)g, x\rangle \end{aligned}$$
Por lo tanto, hemos probado la existencia de un "representante" para φ, que corresponde a $u = \varphi(g)g$. Veamos la unicidad, sean u_1, u_2 dos representantes para φ. Entonces:
$$\begin{array}{rclcl} \varphi(x) & = & \langle u_1, x\rangle & = \langle u_2, x\rangle & \forall x \in H \\ \Longrightarrow\ \langle u_1 - u_2, x\rangle & = & 0 & & \forall x \in H \end{array}$$
Evaluando en $x = u_1 - u_2$, se tiene que $\langle u_1 - u_2, u_1 - u_2\rangle = \|u_1 - u_2\|^2 = 0 \Longrightarrow u_1 = u_2$. ■