MA2202-1 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Jaime Ortega P.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.
03 de Diciembre - Primavera 2014

Auxiliar Extra Preparación Examen

Pregunta 1.

(a) Calcule, usando el Teorema de Stokes, la integral de línea

$$\int_\gamma (x^2 - 3y^2)dx + (z^2 + y)dy + (x + 2z^2)dz$$

donde γ es la curva que se obtiene como intersección del plano $x - 2y + z = 5$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 9$, recorrida en sentido anti-horario.

(b) Sea R la región sólida contenida en el primer octante, limitada por los planos $x = y = 0$ y la superficie $S = S_1 \cup S_2$, donde S_1 es el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ con $0 \leq z \leq h$ y S_2 es el disco contenido en el plano $z = h$, centrado en $(0, 0, h)$ y de radio $\sqrt{h}$. Sea F el campo vectorial definido por $F(x, y, z) = (x + z, x + y, y + z)$.
Calcule el flujo del campo F a través de S_1 y utilice adecuadamente el teorema de Gauss para obtener el volumen de R.

Pregunta 2.

(a) Calcule el valor de $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}dz$. Utilice lo anterior para demostrar que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(n\theta - \operatorname{sen}\theta)d\theta = \frac{2\pi}{n!}$$

(b) Calcule $\displaystyle\int_{|z-2|=3} \frac{\cos(e^{i\pi z})}{z^3 - 4z^2}dz = \frac{\pi^2}{4}(e - e^{-1})$.

(c) Demuestre que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\operatorname{sen}(x)}{2 - 2\cos(x)}dx = 2\pi \ln 2$

Ind: Considere $f(z) = \frac{z}{1-e^{-iz}}$ y el contorno γ dado por el rectángulo de vértices $(-\pi, \pi, \pi + iR, -\pi + iR)$. Asuma que la integral sobre el segmento superior del rectángulo se va a 0 cuando R tiende a infinito Además use sin demostración que $\int_0^\infty \frac{1}{1+e^y}dx = \ln 2$

(d) Calcule $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(x)}{x^2 + a^2}dx$, donde $a > 0$

¿Qué pasa si ahora $a < 0$?

Pregunta 3. Sea f una función continua tal que f y f' son integrables.

(a) Pruebe que $\widehat{(f')}(s) = is\hat{f}(s)$

(b) Pruebe que la transformada de Fourier de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es $\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|s|}$

(c) Calcule la transformada de Fourier de $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$

(d) Pruebe que si $a \neq 0 \Rightarrow \widehat{f(ax)}(s) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{s}{a})$. Calcule la Transformada de Fourier de $h(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$