MA2202-1 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Jaime Ortega P.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.
18 de Noviembre - Primavera 2014

Auxiliar 14

Pregunta 1. Considere una función de clase $\mathcal{C}^1$, con periodo 2ℓ tal que $\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = 0$

(a) Pruebe la identidad de Parseval, esto es, pruebe que existen escalares a_n y b_n tales que:

$$\int_{-\ell}^{\ell} f^2(x)dx = \ell\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

(b) Considere la función $f(x) = x$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ extendida periodicamente a todo $\mathbb{R}$. Encuentre el valor de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Ind: Sólo para la segunda serie utilice la parte (a)

Pregunta 2. Considere las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continuas e integrables. Usando la Transformada de Fourier, demuestre la siguiente propiedad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s)\overline{\hat{g}(s)}ds$$

De lo anterior, concluya la identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(s)|^2ds$$

Pregunta 3. Considere la función $\widehat{g} : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por: $\widehat{g}(s,t) = e^{ist}e^{-ks^2t}$, $k > 0$. Muestre que $\widehat{g}$ es la Transformada de Fourier de:

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2kt}}e^{-(x+t)^2/4kt}$$

Ind: Puede usar sin demostración que $\widehat{e^{-x^2/2}} = e^{-s^2/2}$ y las propiedades:

$$\widehat{f(x+a)}(s) = e^{isa}\widehat{f}(s) \quad a \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{|a|}\widehat{f\left(\frac{x}{a}\right)}(s) = \widehat{f}(as) \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}$$