



MA2202-1 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Jaime Ortega P.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.
21 de Octubre - Primavera 2014

Auxiliar 11 (Horario de Auxiliar)

Pregunta 1.

(a) Pruebe que $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(2\alpha \cos \theta) d\theta$

Indicación: Comience probando que $\left(\frac{\alpha^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\alpha^n \exp(\alpha z)}{n! z^{n+1}} dz$

(b) Calcule $\int_0^{\infty} \exp(-x^2) \cos(2\beta x) dx$, donde $\beta > 0$.

Indicación: Integre $f(z) = \exp(-z^2)$ sobre el rectángulo de vértices $R, R + i\beta, -R, -R + i\beta$. Pruebe que las integrales sobre los lados verticales tienden a cero cuando $R \rightarrow \infty$

Pregunta 2. Sea $p(z) = \sum_{k=0}^N c_k(z - z_0)^k$ un polinomio de grado $N \geq 1$, para $z_0 \in \mathbb{C}$. Demuestre que:

$$\int_{|z-z_0|=a} p(z) d\bar{z} = -2\pi i p'(z_0) a^2,$$

Donde la curva está recorrida en sentido antihorario y $a > 0$.

Nota: $\int_{\Gamma} f(z) d\bar{z} = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) \overline{z'(t)} dt$, donde $z : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ es una parametrización de Γ .

Pregunta 3. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C} - \mathcal{P}$, donde $\mathcal{P}$ es el conjunto (finito) de polos de f . Suponga que: $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}$ Donde $p > 1$ y $M, K > 0$. Denotamos por $z_1, z_2, \dots, z_m$ a los polos de f . Supongamos además que $z_j \notin \{k/2 : k \in \mathbb{Z}\}$. El objetivo del problema es probar que bajo estas hipótesis:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = - \sum_{j=1}^m \text{Res}(\pi f(z) \cot(\pi z), z_j) \quad (1)$$

(a) Muestre que z_j es un polo de $\pi f(z) \cot(\pi z)$ y que todo entero k es polo simple de $\pi f(z) \cot(\pi z)$.

(b) Para $N \in \mathbb{N}$ sea γ_N es el camino correspondiente al borde del cuadrado de vértices:

$$(N + 1/2)(-1 - i), (N + 1/2)(1 - i), (N + 1/2)(1 + i), (N + 1/2)(-1 + i)$$

Pruebe que si N es suficientemente grande, entonces:

$$\left| \int_{\gamma_N} \pi f(z) \cot(\pi z) \right| \leq \frac{A\pi K(8N + 4)}{N^p}$$

donde A es una constante (dato) independiente de N tal que $|\cot(\pi z)| \leq A, \forall z \in \gamma_N$.

(c) Pruebe la afirmación (1).

(d) Sea $a > 0$. Demuestre que: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a)$