MA2202-1 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Jaime Ortega P.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.
02 de Septiembre - Primavera 2014

Auxiliar 5

Nota: Puede usar que para un campo $\vec{F} = F_u\hat{u} + F_v\hat{v} + F_w\hat{w}$, escrito en coordenadas ortogonales:

$$\text{rot}\,\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

Pregunta 1. Considere el campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ambos de clase $\mathcal{C}^1$. Es posible probar la identidad $\text{rot}(f\vec{F}) = f\,\text{rot}(\vec{F}) + \nabla f \times \vec{F}$ para:

i) $\vec{F} = (F_1(x,y,z), 0, 0)$ ii) $\vec{F} = (0, F_2(x,y,z), 0)$ iii) $\vec{F} = (0, 0, F_3(x,y,z))$

(a) Verifique identidad sólo en **uno** de los 3 casos.

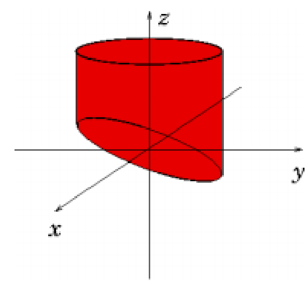
(b) Usando las 3 afirmaciones, pruebe la identidad para el caso general $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

(c) Sean u y v campos de clase $\mathcal{C}^2$. Pruebe que si S denota una superficie abierta y Γ su borde, entonces:

$$\int_\Gamma u\nabla v \cdot \hat{t}\; dl = \iint_S (\nabla u \times \nabla v)\cdot \hat{n}\; dA$$

Pregunta 2. Considere el siguiente campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (3x^2y - 3z + e^x \operatorname{sen} z)\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + (e^x\cos z - 3x)\hat{k}$$



(a) Calcule $\text{rot}\,\vec{F}$.
(b) Considere la curva $\Gamma : \vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Calcule:

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Ind: Note que Γ es el borde inferior de la porción de cilindro de la figura.

Pregunta 3. La superficie S corresponde a la unión de 3 pedazos. Por una parte, 2 sectores circulares horizontales de radio R y centrados en el eje z, de los cuales el primero corresponde a $\theta \in [0, \pi/4]$ y altura $z = 0$ y el segundo, $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$ a una altura $z = H$. El tercer pedazo es un rectángulo definido por $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq z \leq H$ y $\theta = \pi/4$ (ver figura). Se orienta la figura de tal forma que la normal al sector circular superior apunte hacia arriba. Considere el campo en cilíndricas, $\vec{F} = \rho^2\hat{k} + z\rho\hat{\rho}$

(a) Utilizando la definición de integral de trabajo, calcule:

$$\int_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

(b) Calcule la misma integral de la parte (a), pero ahora utilizando el Teorema de Stokes.