



MA2202-1 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.

Profesor: Jaime Ortega P.

Auxiliar: Ítalo Riarte C.

26 de Agosto - Primavera 2014

Auxiliar 4

Definición: Sea Γ una curva parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Se define el trabajo del campo vectorial \vec{F} a lo largo de la curva Γ como:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

Pregunta 1.

- (a) Calcule el trabajo de $\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x, 0)$ a lo largo de una circunferencia de radio R contenida en el plano XY y centrada en el origen.
- (b) Calcule el trabajo de $\vec{F}(x, y, z) = yx^2\hat{i} - xz\hat{j} + 3y\hat{k}$ a lo largo de la curva correspondiente al borde del paraboloido $2x = z^2 + y^2$ con $0 \leq x \leq 2$.
- (c) Calcule el trabajo de $\vec{F}(x, y, z) = z\hat{i} + e^{-xyz^2}\hat{j} + y\hat{k}$ a lo largo de la curva generada por la intersección del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ con la esfera $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4$ para $x \leq 0$ recorrida "de abajo hacia arriba".

Pregunta 2: Sea Γ la curva que se obtiene de intersectar el casquete esférico unitario centrado en el origen con la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Considere Γ recorrida en sentido antihorario. Calcule el trabajo a lo largo de Γ del campo descrito en coordenadas cilíndricas $\vec{F}(\rho, \theta, z) = (z - \rho)\frac{\theta^2}{2}\hat{\rho} + z\theta\hat{\theta} + \frac{\theta^2}{2}\rho\hat{k}$.

Pregunta 3: Sean $M(x, y) = 2x + y^3$ y $N(x, y) = 3y - 4x$ y considere la curva Γ formada por las ecuaciones:

$$x = y^2, \quad y = x^2, \quad x, y \geq 0$$

recorrida en sentido antihorario, y sea S la superficie encerrada por Γ . Verifique que:

$$\int_{\Gamma} M dx + N dy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

calculando ambas integrales.

Pregunta 4: (Propuesta) Suponga que una montaña de radio R y altura H se puede modelar como un cono con los mismos parámetros. En la montaña hay un camino que va desde un punto en la base hasta la cúspide rodeando la montaña 2 veces, de tal forma que $\frac{dz}{d\theta}$ es constante. Suponga que además de la gravedad, sobre un vehículo que recorre el camino hacia la cima, actúa el viento con una fuerza que aumenta cuadráticamente con la altura, horizontalmente, siempre tangente a la montaña y en dirección contraria a los vehículos que suben.

Calcule el trabajo realizado por el vehículo para llegar a la cúspide de la montaña.