MA2202-1 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Jaime Ortega P.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.
26 de Agosto - Primavera 2014

Auxiliar 3

Puede usar las siguientes fórmulas para $\vec{F} = F_u\hat{u} + F_v\hat{v} + F_w\hat{w}$, escrito en coordenadas ortogonales:

- $\operatorname{div}\vec{F} = \dfrac{1}{h_u h_v h_w}\left(\dfrac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \dfrac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \dfrac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right)$
- $\nabla f = \dfrac{1}{h_u}\dfrac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \dfrac{1}{h_v}\dfrac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \dfrac{1}{h_w}\dfrac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$

Pregunta 1(Auxiliar 2): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ una región acotada, cuyo borde $\partial\Omega$ es una superficie orientable y regular. Sean f y g campos escalares y $\vec{F}$ un campo vectorial donde f y $\vec{F}$ son de clase $\mathcal{C}^1$ y g de clase $\mathcal{C}^2$

(a) Pruebe la identidad vectorial $\operatorname{div}(f\vec{F}) = \nabla f \cdot \vec{F} + f \operatorname{div}\vec{F}$

(b) Muestre que
$$\int_\Omega f\Delta g \; dV = \int_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot \hat{n} \; dA - \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \; dV$$

(c) Sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ un campo escalar no nulo en Ω, pero que se anula sobre $\partial\Omega$. Muestre que:
$$\Delta u = \lambda u \Rightarrow \lambda < 0$$

Nota: Este resultado dice que en caso de existir, los valores propios del laplaciano son negativos.

Pregunta 2: Considere $\vec{F} = \dfrac{1}{x^2+y^2}\left[(x - y\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\imath} + (y + x\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\jmath} + z(x^2+y^2)\hat{k}\right]$.

(a) Calcule $\operatorname{div}\vec{F}$.

(b) Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie de cualquier esfera de radio $R > 0$, orientada sobre la normal interior a ésta, que no intersecte al eje OZ.

Pregunta 3: (Resolver con Cuidado) En la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un neutrón y un protón tiene un potencial $U(r) = Ke^{-\alpha r}/r$ (en coordenadas esféricas) para ciertas constantes $K < 0$ y $\alpha > 0$.

(a) Encuentre la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \vec{0}$

(b) Calcule directamente el flujo de $\vec{F}$ a través de un casquete esférico de radio $r = a$, $a > 0$ orientado según la normal exterior.

(c) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \vec{0}$

(d) Demuestre que si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por trozos y está orientada según la normal exterior, entonces:
$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = 4\pi K - \alpha^2 \int_\Omega U dV$$
¿Contradice ésto el teorema de la divergencia de Gauss? Explique.
Indicación: defina un conjunto Ω_a donde si se pueda aplicar el teorema de Gauss.