MA2202-1 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Jaime Ortega P.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.
25 de Agosto - Primavera 2014

Pauta Auxiliar 2

Pregunta 1. Sea $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ y $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z^2=x^2+y^2,\ 0\leq z\leq H\right\}$, orientado de tal manera que la normal apunte '*hacia adentro*'. Calcular de dos maneras

$$\int_S \vec{F}\cdot\hat{n}dA$$

(a) Directamente, mediante la definición de tal integral.

Solución: Usando coordenadas cilíndricas, la ecuación del manto del cono se escribe $z^2=\rho^2 \Rightarrow z=\rho$ (ya que $z>0$). De esta forma, una parametrización de S es:

$$\vec{r}(\theta,z)=(z\cos(\theta),z\operatorname{sen}(\theta),z) \quad \theta\in[0,2\pi], \quad z\in[0,H]$$

Calculamos:

- $\vec{r}(\theta,z)=(z\cos(\theta),z\operatorname{sen}(\theta),z)$
- $\dfrac{d\vec{r}}{d\theta}=(-z\operatorname{sen}(\theta),z\cos(\theta),0)$
- $\dfrac{d\vec{r}}{dz}=(\cos(\theta),\operatorname{sen}(\theta),1)$
- $\dfrac{d\vec{r}}{d\theta}\times\dfrac{d\vec{r}}{dz}=(-z\cos\theta,-z\operatorname{sen}\theta,z)$

por lo tanto la integral de flujo se calcula como:

$$\int_S \vec{F}\cdot\hat{n}dA=\int_0^{2\pi}\int_0^H \vec{F}(\vec{r}(\theta,z))\cdot\hat{n}\cdot\left|\left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\times\frac{d\vec{r}}{dz}\right|\right|dzd\theta$$

Notar que $\hat{n}=\frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}\times\frac{d\vec{r}}{dz}}{\left|\left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\times\frac{d\vec{r}}{dz}\right|\right|}$, por lo que el denominador se cancelará con la siguiente expresión en la integral anterior, es decir:

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F}\cdot\hat{n}dA&=\int_0^{2\pi}\int_0^H \vec{F}(\vec{r}(\theta,z))\cdot\left(\frac{d\vec{r}}{d\theta}\times\frac{d\vec{r}}{dz}\right)dzd\theta\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^H (z\cos(\theta),z\operatorname{sen}(\theta),z)\cdot(-z\cos\theta,-z\operatorname{sen}\theta,z)dzd\theta\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^H (-z^2\cos^2\theta-z^2\operatorname{sen}^2\theta+z^2)dzd\theta\\&=0\end{aligned}$$

Nota: Queda propuesto trabajar el problema completamente en coordenadas cilíndricas, notando que $\vec{F}=\rho\hat{\rho}+z\hat{k}$ y $\vec{r}=z\hat{\rho}+z\hat{k}$ (ambos escritos en coordenadas cilíndricas)

(b) Mediante algún teorema de integración.

Solución: El teorema de integración apropiado en este caso es el Teorema de la Divergencia (o Gauss). Se debe tener mucho cuidado con las hipótesis del teorema ya que exigen que sean aplicados sobre superficies regulares por pedazos, orientadas según la normal **exterior** y que el campo vectorial sea de clase $\mathcal{C}^1$. En lineas generales el teorema dice que:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

Como utilizaremos el teorema sobre el **cono** hay que notar está formado por dos superficies: el **manto** y la **tapa del cono** por lo tanto la igualdad que plantea el teorema en este caso es:

$$\iiint_{\text{Cono}} \operatorname{div}(\vec{F}) dV = \iint_{\text{Manto}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA + \iint_{\text{Tapa}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

En el problema se nos pide calcular la integral de Flujo sobre S, es decir sobre el Manto del cono por lo cual despejamos:

$$\iint_{\text{Manto}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iiint_{\text{Cono}} \operatorname{div}(\vec{F}) dV - \iint_{\text{Tapa}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

Si calculamos cada integral de la derecha, tendremos el valor de la integral de la izquierda.

- Para $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) = (x, y, z)$ calculamos $\operatorname{div}(\vec{F}) = \dfrac{dF_1}{dx} + \dfrac{dF_2}{dy} + \dfrac{dF_3}{dz} = 1 + 1 + 1 = 3$, con lo cual

$$\begin{aligned}\iiint_{\text{Cono}} \operatorname{div}(\vec{F}) dV &= 3 \iiint_{\text{Cono}} dV \\ &= 3 \cdot \text{vol(Cono)} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{3} \pi H \cdot H^2 \\ &= \pi H^3\end{aligned}$$

- La tapa se puede parametrizar de forma típica por $\vec{r}(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, H)$ $\rho \in [0, H]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y el vector normal de la tapa claramente es $\hat{k} = (0, 0, 1)$, por lo que el producto punto "anulará" las otras componentes. Con esto:

$$\begin{aligned}\iint_{\text{Tapa}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA &= \iint_{\text{Tapa}} (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, H) \cdot (0, 0, 1) dA \\ &= H \iint_{\text{Tapa}} dA \\ &= H \cdot \text{área(Tapa)} \\ &= H \cdot \pi H^2 \\ &= \pi H^3\end{aligned}$$

Con lo cual

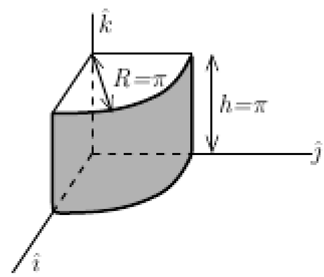
$$\begin{aligned}\iint_{\text{Manto}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA &= \iiint_{\text{Cono}} \operatorname{div}(\vec{F}) dV - \iint_{\text{Tapa}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA \\ &= \pi H^3 - \pi H^3 = 0\end{aligned}$$

Lo que es consistente con la parte (a). Notar que el único detalle es que la normal en la parte (a) apunta hacia "adentro" y aquí hacia "afuera" (exterior), por lo que en verdad el resultado debe ir con signo menos, lo cual no es relevante en este caso pues da 0.

Pregunta 2. Use apropiadamente el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (e^z \sin(y) + xy^2 z)\hat{\imath} + (e^x \cos(z) + x^2 yz)\hat{\jmath} + (x^2 e^y)\hat{k}$$

sobre el **manto** (parte sombreada) del cuarto de cilíndro de radio y altura π de la figura, con la normal orientada hacia el exterior.



Solución:
Queremos calcular $\Phi = \iint_M \vec{F}\cdot \hat{n} dA$, con $\hat{n}$ la normal exterior respecto al cilíndro asociado a este manto M. Para usar el Teorema de la divergencia es necesario cerrar la superficie (de modo que la superficie sobre la cual aplicamos el teorema sea el borde geométrico de un abierto Ω, por ejemplo: $\Omega = \frac{1}{4}$ cilindro.)
Así pues, en el caso que $\Omega = \frac{1}{4}$ cilindro se tiene que: $\partial\Omega = M \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$. Donde T_1 es la tapa ubicada en el plano XZ, T_2 es la tapa ubicada en el plano YZ, T_3 es la tapa ubicada en el plano XY y T_4 es la tapa paralela al eje XY, ubicada a altura $z = \pi$.
Notemos que $\vec{F}$ es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$ y las superficies involucradas son todas regulares, luego $\partial\Omega$ es regular a trozos. Por lo tanto, en virtud del Teorema de la divergencia:

$$\iint_{M\cup T_i} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_\Omega div\vec{F}\cdot dV$$

Se tiene que:

$$div\vec{F} = \partial_x(e^z \sin(y) + xy^2 z) + \partial_y(e^x\cos(z) + x^2yz) + \partial_z(x^2e^y) = y^2z + x^2z = (x^2+y^2)z$$

Luego, notando que $\Omega = \frac{1}{4}$ cilindro $= \{(\rho,\theta,z) :\ \rho\in[0,\pi], z\in[0,\pi], \theta\in[0,\pi/2]\}$:

$$\iiint_\Omega div\vec{F}\cdot dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \rho^2 z\cdot \rho d\rho dz d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \rho^3 z d\rho dz d\theta = \frac{\pi^7}{16}$$

Por otro lado:

$$\iint_{M\cup U_i} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_M \vec{F}\cdot d\vec{S}}_{\Phi} + \sum_{i=1}^{4}\iint_{T_i}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \frac{\pi^7}{16}$$

Así:

$$\Phi = \frac{\pi^7}{16} - \left(\sum_{i=1}^{4}\iint_{T_i}\vec{F}\cdot d\vec{S}\right)$$

Notemos que T_3 es la misma superficie que T_4, excepto por su altura, T_3 está en $z=0$ y T_4 en $z=\pi$, por otro lado:

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = -x^2e^y \text{ en } T_3 \text{ y } \vec{F}\cdot\hat{n} = x^2e^y \text{ en } T_4$$

esto debido a que se debe usar la normal exterior en las tapas, en T_3 es $-\hat{k}$ y en T_4 es $\hat{k}$. Notemos que integramos functiones que NO dependen de z en superficies que solo difieren en su parametrización por el factor z. Por lo tanto, se tiene que:

$$\iint_{T_3} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{T_4} \vec{F}\cdot d\vec{S} = 0$$

y por lo tanto:

$$\Phi = \frac{\pi^7}{16} - \iint_{T_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} - \iint_{T_2} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

Así que basta calcular explícitamente solo estos dos flujos.
Veamos el primero:
Debemos parametrizar la tapa T_1 que es un cuadrado de lado π en el plano XZ (ver la figura), la parametrización es:

$$\sigma(x,z) = (x,0,z), \quad x \in [0,\pi],\ z \in [0,\pi]$$

y naturalmente la normal exterior en esta cara es:

$$\hat{n} = (0,-1,0)$$

Luego:

$$\iint_{T_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^\pi \int_0^\pi (0, e^x\cos(z)+0, x^2e^0)\cdot(0,-1,0)dxdz = \int_0^\pi \int_0^\pi -e^x\cos(z)dxdz = -(e^\pi - 1)\int_0^\pi \cos(z)dz = 0$$

Por lo tanto el flujo de $\vec{F}$ a través de T_1 es 0.
Calculemos finalmente el flujo de $\vec{F}$ a través de T_2:
Ahora debemos parametrizar la tapa T_2 que es un cuadrado de lado π en el plano YZ (ver la figura), la parametrización es:

$$\sigma(y,z) = (0,y,z), \quad y \in [0,\pi],\ z \in [0,\pi]$$

y en este caso, la normal exterior es:

$$\hat{n} = (-1,0,0)$$

Luego:

$$\iint_{T_2} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^\pi \int_0^\pi (e^z\sin(y), \cos(z), 0)\cdot(-1,0,0)dydz = \int_0^\pi \int_0^\pi -e^z\sin(y)dydz = -2(e^\pi - 1)$$

Por lo tanto el flujo de $\vec{F}$ a través de T_1 es $-2(e^\pi - 1)$.
Conclusión final:

$$\Phi = \frac{\pi^7}{16} - 0 - (-2(e^\pi - 1)) = \frac{\pi^7}{16} + 2(e^\pi - 1)$$

Pregunta 3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ una región acotada, cuyo borde $\partial\Omega$ es una superficie orientable y regular. Sean f y g campos escalares y $\vec{F}$ un campo vectorial donde f y $\vec{F}$ son de clase $\mathcal{C}^1$ y g de clase $\mathcal{C}^2$

(a) Pruebe la identidad vectorial $\operatorname{div}(f\vec{F}) = \nabla f \cdot \vec{F} + f \operatorname{div} \vec{F}$

Solución: Escribimos el campo en cada componente $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ claramente $f\vec{F} = (fF_1, fF_2, fF_3)$ donde se omite la dependecia de (x,y,z) para no complicar la notación. Utilizando la definición de divergencia (y recordando la regla del producto):

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\vec{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}(fF_1) + \frac{\partial}{\partial y}(fF_2) + \frac{\partial}{\partial z}(fF_3) \\
&= \left(F_1\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial F_1}{\partial x}\right) + \left(F_2\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial F_2}{\partial y}\right) + \left(F_3\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial F_3}{\partial z}\right) \\
&= \left(F_1\frac{\partial f}{\partial x} + F_2\frac{\partial f}{\partial y} + F_3\frac{\partial f}{\partial z}\right) + f\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (F_1, F_2, F_3) + f \operatorname{div}(\vec{F}) \\
&= \nabla f \cdot \vec{F} + f \operatorname{div} \vec{F}
\end{aligned}$$

(b) Muestre que

$$\int_\Omega f\Delta g \; dV = \int_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot \hat{n} \; dA - \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \; dV$$

Solución: Aplicando el teorema de la divergencia (o Gauss):

$$\int_\Omega \operatorname{div}(f\nabla g) \; dV = \int_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot \hat{n} \; dA$$

Utilizando la fórmula de la parte (a) para $\vec{F} = \nabla g$ y recordando que por definición $\operatorname{div}(\nabla g) = \Delta g$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\nabla g) &= \nabla f \cdot \nabla g + f \operatorname{div}(\nabla g) \\
&= \nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g
\end{aligned}$$

Con esto el teorema de la divergencia queda:

$$\int_\Omega (\nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g) \; dV = \int_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot \hat{n} \; dA$$

De donde se despeja la fórmula de integración por partes:

$$\int_\Omega f\Delta g \; dV = \int_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot \hat{n} \; dA - \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \; dV$$

(c) Sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ un campo escalar no nulo en Ω, pero que se anula sobre $\partial\Omega$. Muestre que:

$$\Delta u = \lambda u \Rightarrow \lambda < 0$$

Solución: Utilizando el resultado de la parte (b) para $f = g = u$ se tiene que:

$$\int_\Omega u\Delta u \; dV = \int_{\partial\Omega} u\nabla u \cdot \hat{n} \; dA - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \; dV$$

Recordando que $\Delta u = \lambda u$ y que $\nabla u \cdot \nabla u = ||\nabla u||^2$ lo anterior se escribe:

$$\lambda \int_{\Omega} u^2 \; dV = \int_{\partial\Omega} u \nabla u \cdot \hat{n} \; dA - \int_{\Omega} ||\nabla u||^2 \; dV$$

Como u es nulo en $\partial\Omega$ la integral $\displaystyle\int_{\partial\Omega} u\nabla u \cdot \hat{n} \; dA = 0$, por lo tanto:

$$\lambda \int_{\Omega} u^2 \; dV = -\int_{\Omega} ||\nabla u||^2 \; dV$$

y despejando:

$$\lambda = -\frac{\displaystyle\int_{\Omega} ||\nabla u||^2 \; dV}{\displaystyle\int_{\Omega} u^2 \; dV}$$

es decir, $\lambda < 0$

Nota: Este resultado dice que en caso de existir, los valores propios del laplaciano son negativos.