MA2202-1 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Jaime Ortega P.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.
19 de Agosto - Primavera 2014

Pauta Auxiliar 1

Pregunta 1. Para las siguientes curvas, encuentre una parametrización y calcule el vector tangente en cada punto del espacio.

(a) Circunferencia de radio a centrada en el eje Z a una altura $z = h$.

Solución: La parametrización, usando coordenadas polares (o cilíndricas) es:

$$\vec{r}(\theta) = (a\cos(\theta), a\,\mathrm{sen}(\theta), h), \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

(b) Segmento de recta que une el punto (a_1, b_1, c_1) con el punto (a_2, b_2, c_2).
Solución: La parametrización usual para describir segmentos de rectas es:

$$\vec{r}(t) = P_i + t(P_f - P_i) \qquad t \in [0, 1]$$

Donde P_i es el punto inicial y P_f el punto final. Utilizándolo en este caso, la parametrización es:

$$\vec{r}(t) = (a_1, b_1, c_1) + t\left[(a_2, b_2, c_2) - (a_1, b_1, c_1)\right], \qquad t \in [0, 1]$$

(c) Triángulo contenido en el plano $x + y + z = 1$, en el primer octante.

Solución: Es lo mismo que el ejercicio anterior solo que ahora separamos la curva en 3 distintas, una por cada lado del triángulo. En primer lugar calculamos las intersecciones con los ejes para determinar los vértices del triángulo, que son:

$$(1, 0, 0) \qquad (0, 1, 0) \qquad (0, 0, 1)$$

De esta forma utilizamos la parametrización que une un punto con el otro, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: \ \vec{r}_1(t) = (1, 0, 0) + t\left[(0, 1, 0) - (1, 0, 0)\right] = (1 - t, t, 0), \qquad t \in [0, 1] \\
\gamma_2 &: \ \vec{r}_2(t) = (0, 1, 0) + t\left[(0, 0, 1) - (0, 1, 0)\right] = (0, 1 - t, t), \qquad t \in [0, 1] \\
\gamma_3 &: \ \vec{r}_3(t) = (0, 0, 1) + t\left[(1, 0, 0) - (0, 0, 1)\right] = (t, 0, 1 - t), \qquad t \in [0, 1]
\end{aligned}$$

Con lo cual el triángulo queda parametrizado con $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$

(d) Curva obtenida al intersectar el casquete esférico unitario (centrado en el origen) con $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución: Usando la ecuación de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, se obtiene la relación:

$$2z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por lo que la interesacción es la curva

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

es decir, la circunferencia de radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ centrada en $(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$, cuya parametrización usual es:

$$\vec{r}(\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta), \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(\theta), \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

O bien, aprovechando los vectores unitarios de coordenadas cilíndricas:

$$\vec{r}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\rho} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}, \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Nota: El vector tangente se calcula simplemente como $\hat{T} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\|\frac{d\vec{r}}{dt}\|}$, donde $\vec{r}$ es la parametrización y t el parámetro. En el ejemplo (d) el cálculo sería:

- $\vec{r}(\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta), \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(\theta), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(\theta), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta), 0\right)$
- $\|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\| = \sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(\theta) + \frac{1}{2}\cos^2(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{T} = (-sen(\theta), cos(\theta), 0) = \hat{\theta}$

O bien utilizando la expresión en cilíndricas:

- $\vec{r}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\rho} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$
- $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\theta}$
- $\|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{T} = \hat{\theta}$

Pregunta 2. Encuentre una parametrización para las siguientes superficies, indicando el vector normal en cada punto.

(a) Cilindro de radio a y altura h

Solución: En efecto, el manto del cilindro está a una distancia a (fija) del eje Z, la variable z se mueve entre 0 y h y el ángulo gira de 0 a 2π, por lo que la parametrización es:

$$\vec{r}(\theta, z) = (a\cos(\theta), a\operatorname{sen}(\theta), z), \quad \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, h]$$

Mientras que el vector normal se calcula como $\hat{n} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta} \times \frac{d\vec{r}}{dz}}{\|\frac{d\vec{r}}{d\theta} \times \frac{d\vec{r}}{dz}\|}$

- $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = (-a\operatorname{sen}(\theta), a\cos(\theta), 0)$
- $\frac{d\vec{r}}{dz} = (0, 0, 1)$
- $\frac{d\vec{r}}{d\theta} \times \frac{d\vec{r}}{dz} = (a\cos(\theta), a\operatorname{sen}(\theta), 0) \Rightarrow \|\frac{d\vec{r}}{d\theta} \times \frac{d\vec{r}}{dz}\| = a$
- $\hat{n} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta} \times \frac{d\vec{r}}{dz}}{\|\frac{d\vec{r}}{d\theta} \times \frac{d\vec{r}}{dz}\|} = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), 0) = \hat{\rho}$

O bien utilizando directamente los vectores de coordenadas cilindricas (recomendado) queda:

- $\vec{r}(\theta, z) = a\hat{\rho} + z\hat{k}$
- $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = a\hat{\theta}$

- $\frac{d\vec{r}}{dz} = \hat{k}$
- $\frac{d\vec{r}}{d\theta} \times \frac{d\vec{r}}{dz} = a\hat{\theta} \times \hat{k} = a\hat{\rho} \Rightarrow \|\frac{d\vec{r}}{d\theta} \times \frac{d\vec{r}}{dz}\| = a \Rightarrow \hat{n} = \hat{\rho}$

(b) Cono con vértice en el origen, radio a y altura h

Solución: Utilizando coordinadas cilíndricas y escribiendo la relación por semejanza de triángulos:

$$\frac{a}{h} = \frac{\rho}{z} \Leftrightarrow z = \frac{\rho h}{a}$$

Por lo que una posible parametrización es:

$$\vec{r}(\rho, \theta) = \left(\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta), \frac{\rho h}{a}\right), \quad \rho \in [0, a], \theta \in [0, 2\pi]$$

Notar que es **clave** ver que una superficie se parametriza con exactamente 2 variables. La parametrización utilizando los vectores unitarios de las coordenadas cilíndricas (útil para calcular de forma más sencilla el vector normal) es:

$$\vec{r}(\rho, \theta) = \rho\hat{\rho} + \frac{\rho h}{a}\hat{k}$$

- $\frac{d\vec{r}}{d\rho} = \hat{\rho} + \frac{h}{a}\hat{k}$ (recordar que $\hat{\rho} = (\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta), 0)$ sólo depende del ángulo θ y **no** de ρ).
- $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \rho\hat{\theta}$
- $\frac{d\vec{r}}{d\theta} \times \frac{d\vec{r}}{dz} = (\hat{\rho} + \frac{h}{a}\hat{k}) \times \rho\hat{\theta} = \rho(\hat{\rho} \times \hat{\theta}) + \frac{h\rho}{a}(\hat{k} \times \hat{\theta}) = \rho\hat{k} - \frac{h\rho}{a}\hat{\rho} \Rightarrow \|\frac{d\vec{r}}{d\theta} \times \frac{d\vec{r}}{dz}\| = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{h\rho}{a}\right)^2}$
- $\hat{n} = \dfrac{\rho\hat{k} - \frac{h\rho}{a}\hat{\rho}}{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{h\rho}{a}\right)^2}} = \dfrac{a\hat{k} - h\hat{\rho}}{\sqrt{a^2 + h^2}}$

Propuesto 1: Pruebe que la parametrización en esféricas para el cono de radio a y altura h anterior es:

$$\begin{aligned}\vec{r}(r, \theta) &= \left(\frac{ar}{\sqrt{a^2+h^2}}\cos(\theta), \frac{ar}{\sqrt{a^2+h^2}}\mathrm{sen}(\theta), \frac{ar}{\sqrt{a^2+h^2}}\right), \quad r \in [0, \sqrt{a^2+h^2}],\ \theta \in [0, 2\pi] \\ &= r\hat{r}, \quad r \in [0, \sqrt{a^2+h^2}],\ \theta \in [0, 2\pi]\end{aligned}$$

Propuesto 2: Pruebe que la parametrización en cartesianas puede escribirse:

$$\vec{r}(x, y) = \left(x, y, \frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}\right), \quad x, y \in [-a, a]$$

(c) Superficie definida por la ecuación $x^2 + y^2 = z$

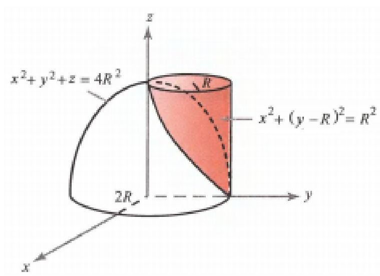
Solución: Escribiendo la relación en cilíndricas, se tiene $\rho^2 = z$. Luego la parametrización puede escribirse como:

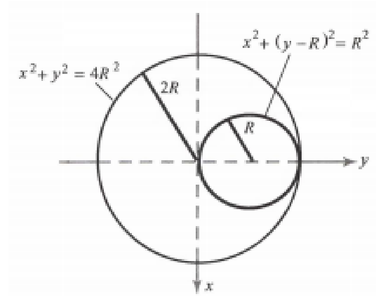
$$\vec{r}(\rho, \theta) = \left(\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta), \rho^2\right), \quad \rho \in [0, \infty),\ \theta \in [0, 2\pi]$$

Queda propuesto calcular el vector normal. Para esto se recomienda utilizar la expresión con los vectores unitarios en cilíndricas,

$$\vec{r}(\rho, \theta) = \rho\hat{\rho} + \rho^2\hat{k}, \quad \rho \in [0, \infty),\ \theta \in [0, 2\pi]$$

Pregunta 3. Considere las siguientes superficies. La figura de la izquierda es una vista lateral, mientras que la figura de la derecha es una vista superior de las superficies.





(a) Parametrice la superficie sombreada en la figura. Considere R como conocido.

Solución: La superficie se puede descomponer en 3 superficies, S_1: tapa superior, S_2: porción del manto del cilindro que queda fuera del paraboloide y S_3 porción del paraboloide dentro del cilindro.
Se debe parametrizar cada una de las 3 superficies que forman la superficie total:

- S_1: Es un círculo de radio R horizontal, a una altura $4R^2$ (reemplazar $x = y = 0$ en la ecuación del paraboloide).
Se utilizarán coordenadas cilíndricas desplazadas en la ecuación del círculo $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ (ver vista superior), el cambio sería: $x = \rho\cos(\theta)$, $y - R = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$, $z = 4R^2$. Con lo cual la parametrización es:

$$\vec{r}(\rho, \theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta) + R, 4R^2), \quad \rho \in [0, R],\ \theta \in [0, 2\pi]$$

- S_2: Es la porción del manto del cilindro $x^2 + (y - R)^2 = R^2$, $z \in [0, 4R^2]$ que queda fuera del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 4R^2$. Entonces deben imponerse las siguientes condiciones

$$\begin{cases} x^2 + (y - R)^2 = R^2 & \text{(en el cilindro)} \\ x^2 + y^2 + z \geq 4R^2 & \text{(fuera del paraboloide)} \\ 0 \leq z \leq 4R^2 & \text{(alturas mínimas y máximas)} \end{cases}$$

En cilíndricas desplazadas esto sería (por la primera relación):

$$(x, y, z) = (R\cos(\theta), R\,\mathrm{sen}(\theta) + R, z)$$

Pero lo difícil es determinar el rango de variación de estas variables. Claramente $\theta \in [0, 2\pi]$.
Reemplazando x e y en la inecuación del paraboloide se tiene:

$$(R\cos(\theta))^2 + (R\,\mathrm{sen}(\theta) + R)^2 + z \geq 4R^2 \Leftrightarrow z \geq 2R^2(1 - \mathrm{sen}(\theta)).$$

Y además $0 \leq z \leq 4R^2$. Juntando las desigualdades para z, se tiene $z \in [2R^2(1 - \mathrm{sen}\,\theta), 4R^2]$.
en resumen, la parametrización sería:

$$\vec{r}(\theta, z) = (R\cos(\theta), R\,\mathrm{sen}(\theta) + R, z), \quad \theta \in [0, 2\pi],\ z \in [2R^2(1 - \mathrm{sen}\,\theta), 4R^2]$$

- S_3: Es la porción del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 4R^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + (y - R)^2 = R^2$, $z \in [0, 4R^2]$. Entonces deben imponerse las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 4R^2 & \text{(en paraboloide)} \\ x^2 + (y - R)^2 \leq R^2 & \text{(dentro del cilindro)} \\ 0 \leq z \leq 4R^2 & \text{(alturas mínimas y máximas)} \end{cases}$$

Queda propuesto parametrizar utilizando coordenadas cilíndricas usuales, es decir,

$$(x, y, z) = (\rho\cos(\theta), \rho\operatorname{sen}(\theta), z)$$

Notar que con esto la ecuación del paraboloide es $\rho^2 + z = 4R^2$ y la inecuación '*dentro del cilindro*' es $\rho \leq 2R\operatorname{sen}\theta$, con lo cual:

$$\vec{r}(\rho,\theta) = \left(\rho\cos(\theta), \rho\operatorname{sen}(\theta), 4R^2 - \rho^2\right), \quad \rho \in [0, 2R\operatorname{sen}\theta],\ \theta \in [0,\pi]$$

Notar que es correcto que $\theta \in [0,\pi]$ ya que estamos en el semiplano $y \geq 0$ (ver vista superior de la figura).

(b) Calcule el área de la superficie del manto de cilindro que queda fuera del paraboloide de la figura.

Solución: El área pedida es la superficie S_2, que fue parametrizada en la parte (a)

$$\vec{r}(\theta, z) = (R\cos(\theta), R\operatorname{sen}(\theta) + R, z), \quad \theta \in [0, 2\pi],\ z \in [2R^2(1-\operatorname{sen}\theta), 4R^2]$$

Con eso el área de buscada directamente es:

$$\begin{aligned} A(S_2) &= \iint_{S_2} dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{2R^2(1-\operatorname{sen}\theta)}^{4R^2} R\,dz\,d\theta \\ &= R\int_0^{2\pi}(4R^2 - 2R^2(1-\operatorname{sen}\theta))d\theta \\ &= 2R^3\int_0^{2\pi}(1+\operatorname{sen}\theta)d\theta \\ &= 4\pi R^3 \end{aligned}$$

Nota: Recordar que en este caso: $dA = \left|\left|\frac{d\vec{r}}{d\theta} \times \frac{d\vec{r}}{dz}\right|\right| dzd\theta$.

En general para una superficie parametrizada por $\vec{\varphi}(u,v)$, $dA = \left|\left|\frac{d\vec{\varphi}}{du} \times \frac{d\vec{\varphi}}{dv}\right|\right| dudv$.