MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Raúl Gormaz
Auxiliares: Carlos Fuentes - Hugo Carrillo
20 de Octubre de 2014

Pauta Ejercicio 2

P1. Sea $w \in \mathbb{C}$, Demuestre que existe al menos un $z \in \mathbb{C}$ solución de:

$$\tan(z) = w$$

Nota: Una posible solución debiera ser
Solución: Se tiene que:

$$\tan(z) = \frac{\text{sen}(z)}{\cos(z)} = \frac{\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})}{\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})} = (-i)(\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}) = w \quad (1)$$

Entonces, despejando z de (1):

$$\begin{aligned} (e^{2iz} - e^{-2iz}) &= (e^{2iz} + e^{-2iz})\, iw \\ e^{2iz}(1 - iw) &= iw + 1 \\ e^{2iz} &= \frac{1 + iw}{1 - iw} \quad (2) \end{aligned}$$

Aplicando Logaritmo sobre (2), se llega a la solucion propuesta:

$$z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iw}{1 - iw}$$

P2. Sabiendo que:

$$\log(z + 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + 1} (z)^{k+1}$$

Pruebe que la solución z de la parte 1 se puede escribir como:

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} ((2i)^{2n} \cdot \frac{w^{2n+1}}{2n + 1})$$

Solución: Tomando la solución de la parte anterior, se tiene que se puede aplicar la identidad

$$log(\tfrac{z_1}{z_2}) = \log(z_1) - \log(z_2) \text{ tal que } z_1, z_2 \in C$$

Esto se puede realizar dado que para efectos del problema $1 + iw$ y $1 - iw$ tienen argumento entre $\frac{-\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ por tanto al sumar o restar el logaritmo de dichos numeros no se supera el valor de $-\pi$ o π, por lo tanto la solución de 1 se escribe como:

$$z = \tfrac{1}{2i} \log(\frac{1 + iw}{1 - iw}) = \tfrac{1}{2i}(\log(1 + iw) - \log(1 - iw)) \quad (3)$$

Luego utilizando la serie de potencias en las funciones $\log(1 + iw)$ y $\log(1 - iw)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \log(1 + iw) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + 1} (iw)^{k+1} \quad (4) \\ \log(1 - iw) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + 1} (-iw)^{k+1} \quad (5) \end{aligned}$$

Reemplazando (4) y (5) en la ecuacion (3):

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}(iw)^{k+1} - (-iw)^{k+1} \\ &= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}(iw)^{k+1}(1-(-1)^{k+1}) \end{aligned}$$

Luego en la sumatoria se cancelan los terminos para k impar, es decir, los terminos no nulos son para todo $k \in \{0, 2, 4, 6...\}$

De esta forma la serie se puede escribir con $k = 2n$:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{2n+1}(iw)^{2n+1}\cdot 2 \\ &= -i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^{2n}}{2n+1}(w)^{2n+1}\cdot i \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(w)^{2n+1} \blacksquare \end{aligned}$$

P3. Sea $\gamma(t) = e^{it}$ la parametrización de una semicircunferencia tal que $t \in [0, \pi]$, pruebe que:

$$|\int_{\gamma(t)}\frac{e^z}{z}dz| \leq e\pi$$

Solución: Considerando los límites de la semicircunferencia 0 y π, y ademas comenzando con el lado derecho se puede notar que:

$$\begin{aligned} |\int_{\gamma(t)}\frac{e^z}{z}dz| &\leq \int_0^{\pi}|\frac{e^z}{z}||dz| \quad \text{,por propiedad de la función valor absoluto} \\ &\leq \int_0^{\pi}\frac{|e^z|}{|z|}|dz| \quad \text{,por propiedad de la función valor absoluto} \\ &\leq \int_0^{\pi}\frac{|e^{\cos(t)+i\,\mathrm{sen}(t)}|}{|e^{it}|}|ie^{it}dt| \quad \text{,Escribiendo } z \text{ en forma polar} \\ &\leq \int_0^{\pi}e^{cos(t)}dt \quad \text{,Acotando por los modulos de los numeros complejos y por la función } sen(t) \text{ entre 0 y} \\ &\leq \int_0^{\pi}edt \quad \text{Tomando el } máx \text{ valor de la función } cos(t) \\ &= e\pi \blacksquare \end{aligned}$$