



Ejercicio 1 - CAA (2014)

Profesor: Raúl Gormaz

Profesores auxiliares: Hugo Carrilo, Carlos Fuentes

Pregunta 1 (2 puntos)

* Demuestre que $\text{rot}(\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \times \nabla \psi$
(puede utilizar, sin demostrar, que $\text{rot}(\nabla \psi) = 0$).

*SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\phi \nabla \psi) &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \hat{e}_k \\ &= \underbrace{\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \hat{e}_k}_{\nabla \phi \times \nabla \psi} + \epsilon_{ijk} \cdot \phi \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \hat{e}_k \quad (1 \text{ punto}) \\ &= \nabla \phi \times \nabla \psi + \underbrace{\phi \cdot \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \hat{e}_k}_{0 \text{ (Por hip.)}} \quad (0.5 \text{ puntos}) \\ &= \nabla \phi \times \nabla \psi + \phi \cdot \text{rot}(\nabla \psi) \quad (0.5 \text{ puntos}) \\ &= \nabla \phi \times \nabla \psi \blacksquare \end{aligned}$$

Pregunta 2 (2 puntos)

* Sea $f(\vec{x}) = \frac{\vec{x} \cdot \hat{e}_3}{\|\vec{x}\|^3}$. Escriba ∇f en coordenadas esféricas.

*SOLUCIÓN: Recordar que $\nabla f = \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial w_i} \hat{w}_i$,¹ ($h_r = 1$, $h_\phi = r$, $h_\theta = r \sin(\phi)$). Entonces, tomando la componente z de $\vec{x}$, se tiene que:

$$f = \frac{\vec{x} \cdot \hat{e}_3}{\|\vec{x}\|^3} = \frac{x_3}{r^3} \quad (1)$$

y recordando que en coordenadas esféricas se tiene la relación:

$$x_3 = r \cos(\phi) \quad (2)$$

al reemplazar (2) en (1), se obtiene la siguiente expresión para el campo escalar :

$$f = \frac{r' \cos(\phi)}{r^3} = \frac{\cos(\phi)}{r^2} \quad (1 \text{ punto})$$

¹ $f = \tilde{f}$, con $\tilde{f}$ en coordenadas esféricas

Luego, como

$$\begin{aligned}
 \nabla f &= \frac{1}{h_r} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{h_\theta} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{h_\phi} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi} \hat{\phi} \\
 &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos(\phi)}{r^2} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\cos(\phi)}{r^2} \right) \hat{\phi} \\
 &= (-2) \frac{\cos(\phi)}{r^3} \hat{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{-\sin(\phi)}{r^2} \hat{\phi} \\
 &= \frac{-2 \cos(\phi)}{r^3} \hat{r} - \frac{\sin(\phi)}{r^3} \hat{\phi} \blacksquare \quad (1 \text{ punto})
 \end{aligned}$$

Pregunta 3 (2 puntos)

* Sea $\vec{F} = \frac{1}{\rho} \hat{\theta} + z \hat{k}$ (en coordenadas cilíndricas). Calcule la integral de trabajo

$$\int_{C+L} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

en donde C es el cuarto de circunferencia en el plano XY que conecta el punto $(a, 0, 0)$ con $(0, a, 0)$ y L es el segmento recto entre $(0, a, 0)$ y $(0, a, H)$.

*SOLUCIÓN: Sea la integral $\int_{C+L} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ($\vec{F} = \frac{1}{\rho} \hat{\theta} + z \hat{k}$).

- Para el tramo C (0.5 puntos parametrizar):

$$\text{Se puede parametrizar como } C(\theta) = \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(\theta) = \begin{pmatrix} -a \sin \theta \\ a \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = a \hat{\theta}$$

Obs.: Entre $(a, 0, 0)$ y $(0, a, 0) \rightarrow$ se mantiene fijo en z

Obs.: Para $C(\theta)$, se tiene que $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Recordando que $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} := \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(z)) \frac{d\vec{r}}{dz}(z) dz$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &\underbrace{=}_{C \text{ curva simple y regular}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left(\frac{1}{\rho} \hat{\theta} + z \hat{k} \right) (C(\theta))}_{\text{El campo } \vec{F}(C(\theta)) \text{ evaluado en } \begin{pmatrix} \rho = a \\ \theta = \theta \\ z = 0 \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{a \hat{\theta}}_{C'(\theta)} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{a} \hat{\theta} + z \hat{k} \right) \cdot a \hat{\theta} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{a} \hat{\theta} \cdot a \hat{\theta} d\theta + \cancel{0 \cdot a \hat{\theta} d\theta} \right) \overset{0}{=} \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
 &= \frac{\pi}{2} \blacksquare \quad (0.5 \text{ puntos})
 \end{aligned}$$

- Para el tramo L :

Se puede parametrizar como $C_L(z) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ z \end{pmatrix}}_{\text{tal que } z \in [0, H]} \Rightarrow C'_L(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{k}$ (0.5 puntos)

De forma semejante a la Curva C, el Campo se evalua en el vector $\begin{pmatrix} \rho = a \\ \theta = \frac{\pi}{2} \\ z = z \end{pmatrix}$:

$$\therefore \int_C \vec{L} \cdot d\vec{r} = \int_0^H \left(\frac{1}{\rho} \hat{\theta} + z \hat{k} \right) \begin{pmatrix} a \\ \frac{\pi}{2} \\ z \end{pmatrix} \hat{k} dz = \int_0^H \left(\frac{1}{a} \hat{\theta} + z \hat{k} \right) \hat{k} dz = \int_0^H z dz = \frac{H^2}{2} \text{ (0.5 puntos)}$$

Finalmente, la integral de línea viene dada por $\int_{C+L} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{H^2}{2} + \frac{\pi}{2}$ ■