MA2001-2 Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Rodrigo Lecaros
Auxiliares: Martin Castillo - Felipe Salas.

Auxiliar 7

6 de octubre de 2014

P1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable. Se define el laplaciano de f como:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Y la ecuación de Laplace:

$$\Delta f = 0.$$

Suponga que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, función dos veces diferenciable, satisface la ecuación de Laplace. Pruebe que $v(s,t) = u(st, \frac{1}{2}(s^2 - t^2))$ también satisface la ecuación de Laplace.

P2. Suponga que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 satisface la ecuación diferencial:

$$y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,$$

y considere el cambio de variables $u(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{2}$ y $v(x,y) = \frac{y^2 + x^2}{2}$. Además sea la función $g(u(x,y), v(x,y)) = F(x,y)$
.

Pruebe que la ecuación se transforma en:

$$2(u^2 - v^2) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = u \frac{\partial g}{\partial v} - v \frac{\partial g}{\partial u}.$$

P3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable. Diremos que f es homogenea de grado p si:

$$(\forall x \neq 0)(\forall t > 0)\ f(tx) = t^p f(x)$$

El objetivo es demostrar que f es homogénea de grado p si y sólo si $Jf(x) = pf(x)\ \forall x \neq 0$.

a) $(\Rightarrow)$ defina $\varphi(t) = f(tx)$ y derivela de dos formas distintas.

b) $(\Leftarrow)$ Muestre que $\varphi(t)t^{-p}$ es constante y concluya.

P4. La ecuación de ondas en una dimensión está dada por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$$

Sea $f(x,t)$ una solución C^2 de esta ecuación. Pruebe que f se puede escribir de la forma:

$$f(x,y) = g(x + ct) + h(x - ct), \quad g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$