Semana 14:

Forma Cuadrática - Dada $A \in \mathcal{M}_{n}(\mathbb{R})$ simétrica, definimos $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$$x \to q(x) = x^t A x$$

q es llamada una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$.
Notamos que $q(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Matriz (Semi) Definida Positiva/Negativa: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica. Diremos que

i) A es definida positiva si $\forall x \neq 0$, $x^t A x > 0$

ii) A es semidefinida positiva si $\forall x$, $x^t A x \geq 0$

iii) A es definida negativa si $\forall x$; $x^t A x < 0$

iv) A es semidefinida negativa si $\forall x$, $x^t A x \leq 0$.

Notamos que A es (semi) definida positiva ssi $-A$ es (semi) definida negativa.

Ejemplo- Consideremos $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Veamos que $q(\cdot)$ es siempre >0 $\forall x \neq 0$.

Sea $x = (x_1, x_2) \Rightarrow x^t A x = [x_1 x_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$= 2x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_1 + 2x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 > 0$
$\hookrightarrow$ si $x \neq 0$.

Luego A es definida positiva.

Teorema- Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz simétrica. Se cumple lo siguiente:

i) A es definida positiva $\iff \forall \lambda$ valor propio de A; $\lambda > 0$.

ii) A es semidefinida positiva $\iff \forall \lambda$ valor propio de A; $\lambda \geq 0$

iii) A es definida negativa $\iff \forall \lambda$ valor propio de A; $\lambda < 0$

iv) A es semidefinida negativa $\iff \forall \lambda$ v.p. de A. $\lambda \leq 0$

v) A se dice indefinida $\iff \exists \lambda_i, \lambda_j$ v.p de A tq $\lambda_i > 0$ y $\lambda_j < 0$.

Dem- Veamos (i) $\Rightarrow$) Sea λ un v.p. de A y $v \neq 0$ el vector propio correspondiente a λ. Entonces $0 < v^t A v = v^t(\lambda v) = \lambda v^t v = \lambda \|v\|^2 \Rightarrow \lambda > 0$.

donde recordemos que $\lambda v = Av$ y la primera desigualdad sale del hecho que A es definida positiva.

$\Leftarrow$) Como A es simétrica, $A = PDP^t$ donde las columnas de P son una base ortonormal de vectores propios y D es la diagonal de los vectores propios.

Entonces, $x^tAx = x^tPDP^tx = (P^tx)^tD(P^tx)$

definiendo $z = P^tx$, tendremos que $z = (z_1, \ldots, z_n)^t$ y entonces

$$x^tAx = z^t \cdot D \cdot z = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2$$ cuyo signo es ≥ 0

pues $\{\lambda_i\}_{i=1}^n > 0$. De hecho, la única forma que x^tAx sea nulo es que $z_1 = \ldots = z_n = 0$, i.e., $z = 0$, pero entonces $P^tx = 0 \Rightarrow x = P \cdot 0 = 0$ ∎

Ejemplo.- Volvamos con nuestra matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ que sabemos es definida positiva. Veamos que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

$$\det((A-\lambda) I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \overset{\text{igualamos}}{=} 0$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = 2 \pm 1 \begin{array}{l} \nearrow \lambda_1 = 3 \\ \rightarrow \lambda_2 = 1 \end{array} \checkmark$$

Teo: Q es semidefinida positiva ssi $Q = \Pi\Pi^T$ con $\Pi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dem: $\Rightarrow$) Como Q es simétrica, $Q = UDU^T$, con $D \geq 0$.

luego podemos escribir $D = D^{1/2} \cdot D^{1/2}$

$$\Rightarrow Q = \underbrace{UD^{1/2}}_{\Pi} \underbrace{D^{1/2} \cdot U^T}_{\Pi^T} = \Pi \cdot \Pi^T$$

$\Leftarrow$) Si $Q = \Pi\Pi^T$, sea $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x^TQx = \underbrace{x^T\Pi}_{y} \cdot \underbrace{\Pi^Tx}_{y^T} = y \cdot y^T \geq 0$$ ∎

Teo. Q será definida positiva ssi $Q = \Pi\Pi^T$ con $\Pi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, invertible.

Dem: del teo anterior sabemos que $Q = \Pi\Pi^T$ con $\Pi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Veamos que Π es inv.

$\Leftarrow)$ $Q = P \cdot D \cdot P^t$ ya que es simétrica. Luego, como los valores de P son todos positivos, $P \cdot D$ es invertible.

Luego $P \cdot D \cdot P^t = \pi \pi^t \Rightarrow P \cdot D = \pi \cdot \pi^t P$

$$\Rightarrow I = \pi \cdot \underbrace{(\pi^t P) \cdot (P \cdot D)^{-1}}_{\pi^{-1}}$$

y además π es invertible.

Formas Cuadráticas:

Sea $q(x) = x^t A x$ una forma cuadrática, con A simétrica. Notamos que entonces $A = P D P^t$ donde $P = \{v_1, \dots, v_n\}$ con $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ base ortonormal de vectores propios de A y $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valores propios de A.

Sea $y = P^t x \Rightarrow q(x) = x^t A x = x^t P \cdot D \cdot P^t x$

$$= y^t \cdot D \cdot y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

Luego la forma cuadrática queda $\hat{q}(y) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

Ejercicio: Demostrar que $\lambda_m \|x\|^2 \leq x^T Q x \leq \lambda_n \|x\|^2$ donde $\lambda_m = \min_{i=1,\dots,n} \{\lambda_i\}$ y $\lambda_n = \max_{i=1,\dots,n} \{\lambda_i\}$

Sol: Notamos que $x^T Q x = q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} y_i^2$

pero $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = y^T y = (P^t x)^t \cdot (P^t x) = x^t \underbrace{P \cdot P^t}_{I} x = x^t x = \|x\|^2$

$\Rightarrow x^T Q x \leq \lambda_n \cdot \|x\|^2$ y análogamente, $\lambda_m \|x\|^2 \leq x^T Q x$.

Obs: Notamos que si A es semidefinida positiva, $q(x) \geq 0$. Como $q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \geq 0$, el mínimo, i.e. $q(x^*) = 0$ se alcanza en un x^* donde $y^* = P^t x^*$ cumple con

$$\begin{cases} y_i = 0 & \text{si } \lambda_i \neq 0 \\ y_j \in \mathbb{R} & \text{si } \lambda_j = 0 \end{cases}$$

Notamos que si y^* es tal que $\hat{q}(y^*) = 0$

$\iff \sum_i \lambda_i {y_i^*}^2 = 0$

$\iff \lambda_i {y_i^*}^2 = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\iff \lambda_i y_i^* = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$$\iff \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1^* \\ \vdots \\ \lambda_n y_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff D \cdot y^* = 0 \quad$ donde $y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix}$

$\iff D \cdot P^t \cdot x^* = 0$

$\iff P \cdot \underline{D \cdot P^t} \cdot x^* = 0$

$\iff \boxed{A \cdot x^* = 0} \quad (1)$

Luego el conjunto $N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ es el conj de los mínimos de $q(x)$.

obs.- Si A es definida positiva, i.e., invertible, de (1) sale que $x^* = 0$ es la única solución de $q(x) = 0$. Notamos que, dado A, podemos definir la función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cuya matriz representante en la base canónica en ambos espacios, es A y entonces N corresponde a $\ker(f)$. Luego, N es un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

caso general.- sea $q(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$ donde $b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$.

Sea x_0 t.q. $Ax_0 = -b$ y definimos $\bar{q}(x) = q(x) - \underbrace{\tfrac{1}{2} b^T x_0 - c}_{\text{constante}}$.

Minimizar $q(x)$ es equivalente a minimizar $\bar{q}(x)$

$\bar{q}(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x_0^T A x + \frac{1}{2} x_0^T A x_0 = \frac{1}{2} x^T A x - \frac{1}{2} x_0^T A x - \frac{1}{2} x_0^T A x + \frac{1}{2} x_0^T A x_0$

$= \frac{1}{2} (\underbrace{x - x_0}_{\bar{x}})^T A (\underbrace{x - x_0}_{\bar{x}}) = \frac{1}{2} \bar{x}^T A \bar{x}$

Scanned by CamScanner

y así se reduce al caso anterior.

luego el conjunto de mínimos es $\{ z \in \mathbb{R}^n \,/\, Az = 0 \}$

$$0 = Az = A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = Ax + b \Rightarrow \boxed{Ax^* = -b}$$ (exactamente derivar e igualar a cero)

Ejemplo. Sea $$\varphi(x) = \frac{1}{2} x^T \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{(2,0,2)}_{b^T} \cdot x + 3$$

buscamos aquellos x tq $Ax = -b$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

luego llegamos a $\begin{array}{l} x_1 + x_3 = -2 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} x_3 = x_3 \\ x_1 = -2 - x_3 \\ x_2 = x_3 \end{array}$

$$\Rightarrow \text{la solución es } x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

sin embargo, para que todos sean mínimos necesitamos que A sea semidefinida positiva. Calculemos sus valores propios:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot((1-\lambda)(2-\lambda) - 1) + 1\cdot(\lambda - 1)$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (1-\lambda) + (\lambda - 1) = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda) - 2\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[\cancel{2} - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - \cancel{2}\right] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - \lambda)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda - 3)\lambda$$

luego $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 0$ $\Rightarrow$ A es semidef. positiva.