Auxiliar 8 - Espacios Vectoriales, Suma Directa y Funciones Lineales

MA1102-4 Álgebra Lineal

*Profesor: Jorge Amaya**Profesores Auxiliares: Felipe Garrido Lucero - Pablo Ugalde Salas*

P1. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. En $E \times E$ se definen las siguientes operaciones:

$$(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$$

$$\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$$

Se puede probar, queda propuesto, que $E \times E$ con estas operaciones es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

a) Considere los conjuntos

$$\Delta = \{(u, v) \in E \times E / u = v\}$$

$$\bar{\Delta} = \{(u, v) \in E \times E / u = -v\}$$

Pruebe que Δ y $\bar{\Delta}$ son subespacios vectoriales de $E \times E$ y que $\Delta \oplus \bar{\Delta} = E \times E$.

b) Pruebe que Δ y $\bar{\Delta}$ son isomorfos a E .

c) Si $\dim E = n$, calcule $\dim \Delta$, $\dim \bar{\Delta}$, $\dim E \times E$.

P2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n . Decimos que $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ es un conjunto casi independiente de vectores si $m > n$ y para todo $j \in \{1, \dots, m\}$ se tiene que $\{v_1, \dots, v_m\} \setminus \{v_j\}$ es linealmente independiente.

a) Pruebe que si $\{v_1, \dots, v_m\}$ es casi independiente, entonces $m = n + 1$.

b) De un ejemplo en $V = \mathbb{R}^2$ de un conjunto casi independiente.

P3. Sea $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / a, b \in \mathbb{R} \right\}$

a) Probar que U es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

b) Encuentre una base de U y su dimensión.

c) Pruebe que $V = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / c, d \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y que $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus V$.

d) Encuentre un isomorfismo entre U y $\mathbb{R}^2$.