Auxiliar 13 - Preparación Examen

MA1101-1 Introducción al Álgebra

Profesor: Alejandro Maass

Profesores Auxiliares: Felipe Garrido Lucero - Patricio Foncea Araneda

P1. Calcule las siguientes sumatorias

i) $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!(n-k)!}$

ii) $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}$

P2. Sea $(G, *)$ un grupo con neutro $e \in G$. Sea $\leq$ una relación de orde en G que posee la propiedad

$$\forall x, y, z \in G \text{ si } x \leq y \Rightarrow x * z \leq y * z$$

Sean $G_+ = \{x \in G / e \leq x\}$ y $G_- = \{x \in G / x \leq e\}$. Demuestre que:

i) $G_+ \cap G_- = \{e\}$

ii) $\forall x \in G$, si $x \in G_+ \Rightarrow x^{-1} \in G_-$.

iii) $(G_+, *)$ es una estructura algebraica.

iv) Si la relación $\leq$ es de orden en G, entonces $G = G_+ \cup G_-$.

P3. i) Sabiendo que la ecuación $z^3 - 9z^2 + 33z = 65$ admite una solución en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de módulo $\sqrt{13}$, determine todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación.

ii) Sabiendo que el polinomio $P(z) = 2z^3 - (5+6i)z^2 + 9iz - 3i + 1$ posee una raíz real a, encuentre todas las raíces del polinomio.

Hint: Estudie la parte real e imaginaria de $P(a)$.

P4. Probar por inducción que para $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1) a_i$$

y deducir, sin hacer uso de inducción, que si $H_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$ entonces $\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$