Auxiliar 12 - Preparación Examen

MA1101-1 Introducción al Álgebra

Profesor: Alejandro Maass

Profesores Auxiliares: Felipe Garrido Lucero - Patricio Foncea Arnedo

1. Funciones

P1. (a) Sea $f : E \rightarrow F$ una función y A, B conjuntos de E . Pruebe que

$$f(B) \setminus f(A) = \emptyset \Rightarrow f(A \cup B) = f(A).$$

(b) Sea $f : E \rightarrow F$ una función que satisface la propiedad

$$\forall A, B \subseteq E, (A \subseteq B \wedge A \neq B \Rightarrow f(A) \neq f(B))$$

Probar que f es inyectiva. **Hint:** Utilice la propiedad de f con A y B adecuados.

P2. Sean $f : E \rightarrow F$ y $g : F \rightarrow G$ funciones, no necesariamente biyectivas.

(a) Sea $A \subseteq G$. Probar que

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

(b) Sea $B \subseteq F$. Probar que

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$$

2. Relaciones

P3. Sea $f : A \rightarrow B$ una función y τ una relación de orden en B . Se define la relación R en A como $xRy \Leftrightarrow f(x)\tau f(y)$. Demuestra que R es relación de orden en A ssi f es inyectiva.

P4. Sea E un conjunto no vacío. Considere la relación sobre $\mathcal{P}(E)$ definida por $ARB \Leftrightarrow \exists f : E \rightarrow E$ biyectiva, tal que $f(A) = B$.

(a) Pruebe que R es relación de equivalencia.

(b) Pruebe que $[A]_R = \{B \in \mathcal{P}(E) : |B| = |A|, |E \setminus B| = |E \setminus A|\}$.

Hint: Para demostrarlo vea por doble inclusión.

Para $\subseteq$, considere que $\forall A \subseteq E, f(A^c) = f(A)^c$ pues f es biyectiva. Además, considere restringir la función f de modo adecuado.

(c) Sea $E = \mathbb{Z}$ y $P \subseteq \mathbb{Z}$ el conjunto de los números pares. ¿Es cierto que $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})RP$? Justifique.