Auxiliar 8 - Anillos, Cuerpos y Números Complejos

MA1101-1 Introducción al Álgebra

Profesor: Alejandro Maass

Profesores Auxiliares: Felipe Garrido Lucero - Patricio Foncea Araneda

P1. Un anillo R se dice Booleano si para cada $x \in R$ se cumple que $x^2 = x$.

(a) Demuestre que $\forall x \in R$, $x + x = 0$.

(b) Demuestre que R es conmutativo para la multiplicación

P2. Sea $(K, +_K, \cdot_K)$ un cuerpo y $(A, +_A, \cdot_A)$ un anillo con unidad y $f : K \to A$ un morfismo de anillos, es decir, f es morfismo de grupos, f separa la multiplicación y $f(1_K) = 1_A$. Pruebe que:

(a) $f(x) \neq 0_A \Leftrightarrow x \neq 0_K$

(b) f es inyectiva

P3. Considere los reales $S = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$ y $S' = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$S + iS' = (1 + \cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^n$$

P4. Expresar en su forma polar el complejo $\dfrac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}}$.

P5. Sean $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $w = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Encuentre el menor entero $n > 0$ tal que $z^n = w^n = 1$.