FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Departamento de Ingeniería Matemática
MA1002-6 / Cálculo Diferencial e Integral
Semestre Primavera 2014

Formulario Curvas $\mathbb{R}^n$

Profesor: Raúl Uribe S.

Auxiliares: Patricio Santis T.

Noviembre de 2014

Parametrizaciones importantes

- **Coordenadas Polares**

$$\vec{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) \qquad \rho \in [0,+\infty[, \quad \theta \in [0,2\pi[$$

- **Coordenadas Cilíndricas**

$$\vec{r}(\rho,\theta,z) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z(\rho,\theta)) \qquad \rho \in [0,+\infty[, \quad \theta \in [0,2\pi[, \quad z \in \mathbb{R}$$

- **Coordenadas Esféricas**

$$\vec{r}(r,\phi,\theta) = (r\sin(\phi)\cos(\theta), r\sin(\phi)\sin(\theta), r\cos(\phi)) \qquad r \in [0,+\infty[, \quad \phi \in [0,\pi], \quad \theta \in [0,2\pi[$$

Sea la curva en $\mathbb{R}^n$ parametrizada por $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, se define la norma euclidiana como:

$$||\vec{r}(t)|| = \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + ... + x_n(t)^2}$$

Se definen los siguientes conceptos para curvas en $\mathbb{R}^n$:

- Longitud de una curva Γ entre t_0 y t_f

$$L = \int_{t_0}^{t_f} \left\| \frac{d\vec{r}(\tau)}{dt} \right\| d\tau$$

- Vectores unitarios Tangente ($\hat{T}$), Normal ($\hat{N}$) y Binormal ($\hat{B}$)

$$\hat{T} = \frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right\|} \qquad \hat{N} = \frac{\frac{d\hat{T}(t)}{dt}}{\left\|\frac{d\hat{T}(t)}{dt}\right\|} \qquad \hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$$

- Curvatura (κ), Torsión (τ) y Radio de Curvatura (R)

$$\kappa(t) = \frac{\left\|\frac{d\hat{T}(t)}{dt}\right\|}{\left\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right\|} \qquad \tau(t) = \frac{\left(-\hat{N}\cdot\frac{d\hat{B}}{dt}\right)}{\left\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right\|} \qquad R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$$

Otra forma de calcular algunos vectores:

$$\hat{B} = \frac{\overrightarrow{r}(t)' \times \overrightarrow{r}(t)''}{||\overrightarrow{r}(t)' \times \overrightarrow{r}(t)''||} \qquad \hat{N} = \frac{(\overrightarrow{r}(t)' \times \overrightarrow{r}(t)'') \times \overrightarrow{r}(t)'}{||(\overrightarrow{r}(t)' \times \overrightarrow{r}(t)'') \times \overrightarrow{r}(t)'||}$$

$$\kappa = \frac{||\overrightarrow{r}(t)' \times \overrightarrow{r}(t)''||}{||\overrightarrow{r}(t)'||^3} \qquad \tau = \frac{(\overrightarrow{r}(t)' \times \overrightarrow{r}(t)'') \cdot \overrightarrow{r}(t)'''}{||\overrightarrow{r}(t)' \times \overrightarrow{r}(t)''||^2}$$

Para encontrar la parametrización en longitud de arco $\sigma(s)$ de una curva parametrizada por $\overrightarrow{r}(t)$:

i) Calcular la longitud de arco $s = s(t) = \displaystyle\int_a^t \left\| \frac{d\overrightarrow{r}(\tau)}{dt} \right\| d\tau$, así se obtiene s en función de t.

ii) Despejar t en función de s. **No siempre se va a poder despejar**.

iii) Reemplazar el valor de t en la parametrización $\overrightarrow{r}(t(s)) = \overrightarrow{\sigma}(s)$

Para la parametrización en longitud de arco se tiene:

- Vectores unitarios Tangente ($\hat{T}$), Normal ($\hat{N}$) y Binormal ($\hat{B}$)

$$\hat{T} = \frac{d\overrightarrow{\sigma}}{ds} \qquad \hat{N} = \frac{\frac{d\hat{T}(s)}{ds}}{\left\| \frac{d\hat{T}(s)}{ds} \right\|} \qquad \hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$$

- Curvatura (κ), Torsión (τ) y Radio de Curvatura (R)

$$\kappa(t) = \left\| \frac{d\hat{T}}{ds} \right\| \qquad \tau(t) = \left(-\hat{N}(s) \cdot \frac{d\hat{B}}{ds} \right) \qquad R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

Fórmulas de Frenet

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa\hat{N} \qquad \frac{d\hat{N}}{ds} = -\kappa\hat{T} + \tau\hat{B} \qquad \frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau\hat{N}$$

Integral sobre una curva

$$\int_\Gamma f dl = \int_a^b f(\overrightarrow{r}(t)) \left\| \frac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt} \right\| dt$$

Para calcular masa de un cuerpo de densidad $\rho(x, y, z)$ se tiene que $f(\overrightarrow{r}(t)) = \rho(\overrightarrow{r}(t))$

$$M = \int_a^b \rho(\overrightarrow{r}(t)) \left\| \frac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt} \right\| dt$$

Centro de masa

$$X_G = \frac{1}{M} \int_a^b x_r \cdot \rho(\overrightarrow{r}) \left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \right\| dt \quad Y_G = \frac{1}{M} \int_a^b y_r \cdot \rho(\overrightarrow{r}) \left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \right\| dt \quad Z_G = \frac{1}{M} \int_a^b z_r \cdot \rho(\overrightarrow{r}) \left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \right\| dt$$

Cálculo Vectorial

$$\hat{T} \cdot \hat{N} = \hat{T} \cdot \hat{B} = \hat{N} \cdot \hat{B} = 0 \qquad \text{(Vectores perpendiculares)}$$

$$\hat{T} \cdot \hat{T} = \hat{N} \cdot \hat{N} = \hat{B} \cdot \hat{B} = 1$$

$$\hat{T} \times \hat{T} = \hat{N} \times \hat{N} = \hat{B} \times \hat{B} = 0$$

$$\hat{T} \times \hat{N} = \hat{B}, \quad \hat{N} \times \hat{B} = \hat{T}, \quad \hat{B} \times \hat{T} = \hat{N}$$

Sea $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, se define el producto interno como:

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

y el producto cruz:

$$\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Cada fracaso enseña al hombre algo que necesitaba aprender.