FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Departamento de Ingeniería Matemática
MA1002 - 6 / Cálculo Diferencial e Integral
Semestre Primavera 2014

Auxiliar 1

Profesor: Raúl Uribe S.

Auxiliar: Patricio Santis T.

08 de Agosto de 2014

Problema 1

Analice si la función definida por $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ es continua en $\mathbb{R}$.

Problema 2

Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{x+a} & \text{si} \quad x < a \\ 2x - e^{x-a} & \text{si} \quad x \geq a \end{cases}$

a) Calcule a de modo que f sea continua.

b) ¿Es f continua en los reales? Si no es así, establezca su nuevo dominio.

c) Demuestre usando TVI que f se anula en algún punto del intervalo $[1, +\infty)$.

Problema 3

Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función continua. Demuestre que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$ (tal punto se denomina punto fijo). ¿f alcanza su mín y máx en $[a, b]$?

Problema 4

Considere la familia de polinomios $g_n(x) = x^n + x - 1$

a) Probar que $\forall n \geq 0$ $g_n(x)$ tiene una raíz positiva.

b) Demuestre que la sucesión de raíces $(r_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente.

Problema 5

Demostrar que eixste algún $x \in \mathbb{R}$ tal que: $x^{190} + \dfrac{150}{x^4 + x^2 + 1} = 120$.

Problema 6

Sea f una función continua que cumple con $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x, y$ en su dominio. Demostrar que se cumple lo siguiente:

a) $f(0) = 0$

b) $f(-x) = -f(x)$ (f impar)

c) $f(nx) = nf(x), \forall n \in \mathbb{N}$

d) Probar que $f(x) = cx$, calcular explicitamente c.

Problema 7

Estudie la continuidad uniforme de las funciones:

- $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[1, +\infty)$ y en $(0, 1]$.
- $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ y $g(x) = e^x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $(0, 1)$.
- $f(x) = \sin(x)$ en $\mathbb{R}$.

Problema 8

Calcular las siguientes derivadas:

$$f(x) = \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}, \qquad g(x) = x^x, \qquad h(x) = \arcsin(2x-1) + 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right), \text{ para } (0,1)$$

$$l(x) = \sqrt[3]{1 + \arctan\tfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}, \qquad w(x) = \ln\left(\frac{a + b\tan(x)}{a - b\tan(x)}\right), \qquad k(x) = \frac{5}{|x+3|}$$

★ Propuestos

$\boxed{\text{P1}}$ Demostra que la ecuación $e^x \cos(x) + 1 = 0$ posee infinitas soluciones reales.
Indicación: Considere intervalos de la forma $[k\pi, (k+1)\pi],\ k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{P2}}$ Un escalador comienza, desde el campamento base, la subida a una montaña a las 8:00 horas; llega a la cima, pernocta en un refugio, y comienza a descender al día siguiente y a la misma hora, por el mismo sendero, hasta el campamento. ¿Hay alguna hora a la que estuvo los dos días a la misma altura?

Me lo contaron y lo olvidé; lo vi y lo entendí; lo hice y lo aprendí.