III : Sucesiones de Funciones y Series

1. Definición (series)

+ Una serie es un par ordenado $(A, (a_n))$ donde A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ numerable y $(a_n)_{n\geq 0}$ es una numeración (ordenamiento del cjto A). La sucesión (a_n) se llama término general de la serie. A partir de (a_n) definimos la sucesión (s_n) de las sumas parciales por $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

El valor de la serie existe cuando (s_n) posee límite. En tal caso decimos que la serie es convergente y su valor es el límite de (s_n)

+ $\sum a_k \Leftrightarrow \sum_{k\geq k_0} a_k \Leftrightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ donde k_0 es el menor entero para el cual s_n está definida

2. Condiciones para la convergencia

TEO 1: (Criterio de Cauchy) sea (a_n) una sucesión y (s_n) la sucesión de sus sumas parciales. La serie $\sum a_k$ converge ssi

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n,m\geq N)\ m>n \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon \qquad \text{OBS: } \sum_{k=n+1}^{m} a_k = s_m - s_n$$

TEO 2: si $\sum a_k$ converge entonces la sucesión $(a_n)\to 0$, recíprocamente, si $(a_n)\not\to 0$ $((a_n)\to a\neq 0)$ entonces la serie $\sum a_k$ diverge.

3. Algebra de series

TEO 3. Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series convergentes. Entonces

i) $\sum(a_k+b_k)$ es convergente y su valor es $(\sum a_k)+(\sum b_k)$

ii) $\forall \lambda\in\mathbb{R}$, $\sum(\lambda a_k)$ es convergente y su valor es $\lambda(\sum a_k)$

4. Criterios para analizar convergencia de series de términos no-negativos

TEO 4: Una serie de términos no-negativos converge ssi las sumas parciales son acotadas superiormente.

OBS: Las series de términos no-negativos convergentes son independientes de la numeración elegida, el valor de la serie es el mismo

TEO 5: Sea $\sum a_k$ una serie de términos no-negativos y convergente. Sea (b_k) una numeración del conjunto $A=\{a_k : k\in\mathbb{N}\}$ entonces $\sum b_k$ es convergente y $\sum b_k = \sum a_k$

→1. Mayoración de series

TEO 6: Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones no negativas de modo que existen n_0 y $\alpha>0$ tq $\forall n\geq n_0$, $a_n \leq \alpha b_n$. Se tiene que si $\sum b_k < +\infty$ entonces $\sum a_k < +\infty$

OBS: contrarrecíproca: Si $\sum a_k$ diverge $\Rightarrow \sum b_k$ diverge.

→2. Comparación por cuociente

TEO 7: Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones tq $\forall n\geq 0$, $0<a_n, b_n$ y supongamos que $c = \lim \frac{a_n}{b_n}$ existe. Se tiene que:

i) Caso $c=0$: Si $\sum b_k<+\infty \Rightarrow \sum a_k<+\infty$

ii) Caso $c>0$: $\sum b_k<+\infty \Leftrightarrow \sum a_k<+\infty$

→3. Criterio del cuociente

TEO 8: Sea (a_n) una sucesión de términos positivos y supongamos que $r=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe. Entonces se tiene que:

i) si $r<1 \Rightarrow \sum a_k$ converge

ii) si $r>1$ o $r=+\infty \Rightarrow \sum a_k$ diverge

iii) si $r=1 \Rightarrow \sum a_k$ puede converger o divergir

OBS: El $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ podría no existir y la serie $\sum a_k$ ser convergente

→4. Criterio de la raíz n-ésima

TEO 9: Sea (a_n) una sucesión de términos no negativos y supongamos que $r=\lim\sqrt[n]{a_n}$ existe. Entonces se tiene que:

i) Si $r<1 \Rightarrow \sum a_k$ converge

ii) Si $r>1$ o $r=+\infty \Rightarrow \sum a_k$ diverge

iii) si $r=1 \Rightarrow \sum a_k$ puede converger o divergir.

OBS: si $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe $\Rightarrow \lim a_n^{\frac{1}{n}}$ existe.

→5. Criterio de la integral impropia

TEO 10: Sea $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}^+$ una función decreciente. Se tiene que

$$\sum_{n\geq 1} f(n) < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$$

→6. Criterios Generales

+ Para una sucesión (u_n) acotada y no negativa, definamos la sucesión (v_n) por

$$v_n = \sup\{u_k : k\geq n\}$$

luego (v_n) es una sucesión decreciente y es acotada inferiormente. Por ende $\lim v_n$ siempre existe. A este límite se le llama el límite superior de (u_n) y se le denota $\limsup u_n$

+ Si (u_n) converge entonces $\limsup u_n = \lim u_n$.

Sea (a_n) una sucesión de términos no-negativos y $u_n=(a_n)^{\frac{1}{n}}$.

TEO 11: Sea (a_n) una sucesión de términos no-negativos y ... Sea $r=\limsup u_n$. Entonces se tiene que:

i) si $r<1 \Rightarrow \sum a_k$ converge

ii) Si $r>1$ o $r=+\infty \Rightarrow \sum a_k$ diverge

iii) si $r=1 \Rightarrow \sum a_k$ puede converger o divergir

5. Series Generales

+ Def: Sea $\sum a_k$ una serie con (a_n) una sucesión cualquiera. Decimos que la serie es absolutamente convergente si $\sum |a_k| < +\infty$

TEO 12: Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además, una serie es absolutamente convergente ssi las series de sus términos negativos y la de sus términos positivos son convergentes.

OBS: Sea $\sum a_k$ una serie con (a_n) una sucesión cualquiera y supongamos que aplicamos el criterio del cuociente a $(|a_n|)$. Sea $r=\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

i) Si $r<1 \Rightarrow \sum a_k$ es una serie abs. convergente. ($\sum a_k$ es convergente)

ii) Si $r>1 \Rightarrow \sum a_k$ es divergente

+ si $r=\lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$ es mayor que $1 \Rightarrow \sum a_k$ diverge.

→1. Criterio de Leibnitz

Def: Una serie es condicionalmente convergente cuando no son absolutamente convergentes.

TEO 13: Sea (a_n) una sucesión decreciente y convergente a cero (i.e. (a_n) es no-negativa). Entonces la serie $\sum(-1)^n a_n$ es convergente

→2. Estabilidad de las series bajo reordenamiento

TEO 14: Si la serie $\sum a_k$ es absolutamente convergente entonces toda serie $\sum b_k$ donde (b_k) es un reordenamiento de (a_k) es absolutamente convergente y su valor es igual a $\sum a_k$

TEO 15: Si $\sum a_k$ es condicionalmente convergente entonces para cualquier número $a\in\mathbb{R}$ existe $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ biyectiva tq $\sum a_{f(k)} = a$

→3. Multiplicación de series.

TEO 16: Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series absolutamente convergentes entonces el producto de las series $(\sum a_k)(\sum b_k)$ es igual a $\sum c_k$ donde (c_k) es cualquier sucesión que contiene exactamente una vez cada uno de los productos $a_i b_j$, por ejemplo $c_k = \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell}$.

6. Sucesiones de funciones

Def: Una sucesión de funciones definidas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ es una función $s: \mathbb{N} \to F(I,\mathbb{R})$ que a cada natural asocia una función $f_n: I \to \mathbb{R}$.

Def (convergencia puntual). Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en un intervalo I. Decimos que $f: I \to \mathbb{R}$ es el límite puntual de la sucesión (f_n) si para todo punto $x \in I$, $\lim f_n(x) = f(x)$. En este caso decimos que la sucesión (f_n) converge puntualmente a f.

OBS: i) El límite puntual de una sucesión de funciones convexas es convexa.
ii) El límite puntual de una sucesión de funciones crecientes es creciente.

Def: (Convergencia uniforme) Decimos que una sucesión (f_n) definida en el intervalo I, converge uniformemente a f, si $\lim \|f_n - f\|_\infty = 0$, donde

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$$

Entonces, al comparar f_n con f usando $\|\cdot\|_\infty$ estamos haciendo un análisis de peor caso, es decir medimos lo más alejado que se encuentra f_n de f en el intervalo I.

TEO 17: El límite uniforme de una sucesión de funciones, cuando existe, coincide con su límite puntual el cual también existe.

TEO 18: Si (f_n) es una sucesión de funciones integrables en $[a,b]$ que convergen uniformemente a f que es integrable sobre $[a,b]$ entonces

$$\lim \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

TEO 19: El límite uniforme de una sucesión (f_n) de funciones continuas en $[a,b]$ es una función continua en $[a,b]$

TEO 20: Sea (f_n) una sucesión de funciones derivables en $[a,b]$ que converge puntualmente a f. Supongamos que la sucesión de las derivadas (f_n') converge uniformemente a una función continua g en $[a,b]$. Entonces f es derivable y $f' = g$.

Def: Decimos que $\sum f_k(x)$ converge puntualmente (uniformemente) sobre I si la sucesión de funciones (s_n) converge puntualmente (uniformemente) sobre I. En este caso escribimos

$$\sum f_k(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

LEMA 1: (Criterio M de Weierstrass). Consideremos I un intervalo en $\mathbb{R}$ y funciones $f_k: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe una sucesión $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de reales positivos tales que

$$|f_k(x)| \le M_k, \ \forall n > n_0, \ \forall x \in I$$

y que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge. Entonces la serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente en I.

7. Series de Potencias.

Def: Las series de potencias son series donde el término general es de la forma $a_k (x-\alpha)^k$.
(En el estudio sólo consideraremos el caso $\alpha = 0$).

TEO 21: Si la serie $\sum^{\infty} a_k x_0^k$ converge se tienen las siguientes conclusiones. Para cada $a \in (0, |x_0|)$ y para todo $x \in [-a,a]$

1) La serie $\sum^{\infty} a_k x^k$ converge absolutamente.

2) Sean $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ y $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

Entonces, la sucesión (f_n) converge uniformemente en $[-a,a]$ hacia f.

3) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ converge

4) Sean $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$ y $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$

Entonces, la sucesión (f_n') converge uniformemente en $[-a,a]$ hacia g

5) Finalmente, f es derivable y $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$

Def: Sea $R = \sup\{x_0 : \sum^{\infty} a_k x_0^k < +\infty\}$. Al valor R lo llamaremos radio de convergencia de la serie de potencias $\sum^{\infty} a_k x^k$.

Def: Llamaremos intervalo de convergencia I al conjunto de reales x para los cuales la serie $\sum^{\infty} a_k x^k$ converge. Tenemos que $(-R,R) \subseteq I \subseteq [-R,R]$.

OBS: Dependiendo de la serie se puede tener $I=(-R,R)$, $I=(-R,R]$, $I=[-R,R)$ o $I=[-R,R]$.

TEO 22: Dadas dos series de potencias $\sum a_k x^k$ y $\sum b_k x^k$ convergentes para x_0. Entonces la serie $\sum (a_k + b_k) x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene la propiedad de que $\sum (a_k + b_k) x^k = \sum a_k x^k + \sum b_k x^k$. Además, si $c_k = \sum^k a_j b_{k-j}$ la serie $\sum c_k x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum c_k x^k = (\sum a_k x^k)(\sum b_k x^k)$.

→1. Teorema de Abel

TEO 23: Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias con radio de convergencia R positivo y supongamos que la serie numérica

$$\sum a_k R^k \quad \text{converge.}$$

Definamos $f: (-R,R] \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x) = \sum a_k x^k$$

Entonces f es continua en $(-R,R]$

OBS: La continuidad de f en el intervalo abierto $(-R,R)$ es directa del TEO 21.
Lo interesante en el teorema es la continuidad en R.