Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 22 de Noviembre del 2001. Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 6

MA12A CALCULO 2001

Problema 1. Dado $n \geq 1$, se define la función $f_n : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mediante

$$f_n(x) = \frac{n+1}{n} \int_x^\infty \frac{dt}{t^{2+1/n}}.$$

(a) (1.5 pto.) Pruebe que $f_n(x) = \frac{1}{x^{1+1/n}}$.

(b) (1.5 pto.) Encuentre el límite puntual $f(x)$ de la sucesión $(f_n(x))$.

(c) (3.0 pts.) Determine si (f_n) converge uniformemente.

Problema 2.

Sea (a_k) una sucesión tal que $\forall k \geq 0$, $a_k \geq 1$. Dado $n \in \mathbb{N}$, se define

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 a_1 \cdots a_n$$

(a) (2.0 pts.) Pruebe que si (P_n) converge a $P \in \mathbb{R}$ entonces $P \geq 1$ y $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = 1$.

(b) (2.0 pts.) Pruebe que (P_n) converge ssi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \ln(a_k)$ converge.

(c) (2.0 pts.) Pruebe que (P_n) converge ssi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k - 1)$ converge.

Problema 3. Sea la serie $\sum a_n x^n$ donde $a_n = 2^n - (-1)^n$.

(a) (1.0 pto.) Demuestre que el radio de convergencia de la serie es $\frac{1}{2}$.

(b) (1.0 pto.) Analice la convergencia de esta serie en $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$.

(c) (1.0 pto.) Pruebe que $\forall x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

$$\sum a_n x^n = \frac{3x}{1 - x - 2x^2}.$$

Ind.: Descomponga $\sum a_n x^n$ como una suma de dos series geométricas.

(d) (1.5 pts.) Por integración demuestre que $\forall x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

$$\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = -\ln[(1+x)\sqrt{1-2x}].$$

(e) (1.5 pts.) Analice la convergencia de la serie $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ en $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$.