

SOLUCIÓN APUNTE MA1002

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

SEMANA 15

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas
Use este material con responsabilidad.

E1.

a) $a_n = \frac{x^{2n+1}}{n!}$

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{|x|^{2n+3}n!}{|x|^{2n+1}(n+1)!} = \lim \frac{x^2}{n+1} = 0 < 1$$

Luego, por el criterio del cociente, $\sum a_n$ converge independientemente del valor de x , por lo que $R = \infty$, $I = \mathbb{R}$.

b) $a_n = \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{|x|^{n+1}\sqrt{n^2+3}}{|x|^n\sqrt{n^2+2n+4}} = |x| \lim \sqrt{\frac{n^2+3}{n^2+2n+4}} = |x|$$

Luego, por el criterio del cociente, converge si $|x| < 1$ y diverge si $|x| > 1$, por lo que $R = 1$.

- **Caso $x = 1$:** $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$. Notemos que $\sqrt{n^2+3}$ es similar a $\sqrt{n^2} = n$ hacia el ∞ . En efecto:

$$\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}}{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt{\frac{n^2}{n^2+3}} = 1 > 0$$

Luego, por comparación por cociente, la serie diverge.

- **Caso $x = -1$:** $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$. Es fácil ver que $|a_n|$ es decreciente. En efecto,

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{n^2+2n+4}} \leq \frac{\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{n^2+3}} = 1$$

Además, es directo ver que $|a_n| \rightarrow 0$, por lo que se tiene la convergencia de $\sum a_n$ por Leibnitz.

Finalmente $I = [-1, 1)$.

c) $a_n = \frac{x^n \sqrt{n}}{3^n}$

Usamos el criterio de la raíz n -ésima:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{|x|}{3} \lim \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \frac{|x|}{3} \Rightarrow R = 3$$

- **Caso $x = 3$:** $a_n = \sqrt{n}$ que no converge a cero por lo que la serie diverge.
- **Caso $x = -3$:** $a_n = (-1)^n \sqrt{n}$ que tampoco converge a cero por lo que la serie diverge.

Finalmente $I = (-3, 3)$.

d) $a_n = x^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Usamos el criterio de la raíz n -ésima:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = |x| \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = |x| \Rightarrow R = 1$$

- **Caso $x = 1$:** $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \neq 0$, por lo que la serie diverge.
- **Caso $x = -1$:** $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Ya se vió que $|a_n| \not\rightarrow 0$, por lo que a_n tampoco converge a cero y luego la serie diverge.

Finalmente $I = (-1, 1)$.

e) $a_n = \frac{x^n}{n^\alpha}$

Usamos el criterio de la raíz n -ésima:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = |x| \lim \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^\alpha = |x| \Rightarrow R = 1$$

- **Caso $x = 1$:** $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Sabemos que converge para $\alpha > 1$. Veamos que para $0 < \alpha \leq 1$ diverge. En efecto,

$$\begin{aligned} 0 < \alpha \leq 1 &\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{\alpha} \\ &\Rightarrow n \leq n^{1/\alpha} \quad / ()^\alpha, \text{ función creciente.} \\ &\Rightarrow n^\alpha \leq n \\ &\Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Como $\sum 1/n$ diverge, se tiene por mayoración que $\sum 1/n^\alpha$ también. Además, si $\alpha \leq 0$, $1/n^\alpha = n^{-\alpha}$ que no converge a cero. Luego si $\alpha \in (-\infty, 1]$ la serie diverge.

- **Caso $x = -1$:** $a_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Como para $\alpha > 0$, $1/n^\alpha$ decrece y converge a cero, se tiene por Leibnitz que la serie converge. Para $\alpha \leq 0$ basta notar que $a_n = (-1)^n n^{-\alpha} \not\rightarrow 0$, por lo que la serie diverge.

En resumen, dependiendo del valor de α tenemos que:

- $\alpha \in (-\infty, 0] \Rightarrow I = (-1, 1)$
- $\alpha \in (0, 1] \Rightarrow I = [-1, 1)$
- $\alpha \in (1, \infty) \Rightarrow I = [-1, 1]$

f) $a_n = (-1)^n x^{2n+1}$

Como x^{2n+1} es decreciente y convergente a cero para $|x| < 1$, por Leibnitz se concluye la convergencia de la serie. Para $|x| > 1$ basta ver que $a_n \not\rightarrow 0$ por lo que diverge. Por lo tanto $R = 1$.

- **Caso $x = 1$:** $a_n = (-1)^n$, que no converge a cero, por lo que la serie diverge.
- **Caso $x = -1$:** $a_n = (-1)^n (-1)^{2n+1} = (-1)^n (-1) = (-1)^{n+1}$, análogo al caso anterior.

Finalmente $I = (-1, 1)$.

g) $a_n = \frac{x^n}{2n+1}$

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{|x|^{n+1}(2n+1)}{|x|^n(2n+3)} = |x| \lim \frac{2n+1}{2n+3} = |x| \Rightarrow R = 1$$

- **Caso $x = 1$:** $a_n = \frac{1}{2n+1}$. Notemos que hacia ∞ , $2n+1$ es similar a $2n$. En efecto,

$$\lim \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n}} = \lim \frac{2n}{2n+1} = 1 > 0$$

Luego, como $\sum \frac{1}{2k}$ diverge, nuestra serie también.

- **Caso $x = -1$:** $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Como $|a_n|$ decrece y converge a cero, la serie converge por Leibnitz.

Finalmente $I = [-1, 1)$.

h) $a_n = x^n \frac{1+\sin(n)}{n}$. PENDIENTE

i) $a_n = x^n \frac{(n+2)(n+1)}{2}$.

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{x^{n+1} \frac{(n+3)(n+2)}{2}}{x^n \frac{(n+2)(n+1)}{2}} = |x| \lim \frac{n+3}{n+1} = |x| \Rightarrow R = 1$$

- **Caso $x = 1$:** $a_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$, que no converge a cero por lo que la serie diverge.
- **Caso $x = -1$:** $a_n = (-1)^n \frac{(n+2)(n+1)}{2}$, que no converge a cero por lo que la serie diverge.

Finalmente $I = (-1, 1)$.

j) $a_n = \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right)x^n \quad a > b > 0$

$$p_n = \frac{a^n x^n}{n} \quad q_n = \frac{b^n x^n}{n^2}$$

Notemos que $\sum (ax)^n$ y $\sum (bx)^n$ poseen R igual a $1/a$ y $1/b$ respectivamente. Por la proposición 10,2, se tiene que

$$R(p_n) = \frac{1}{a} \quad R(q_n) = \frac{1}{b}$$

Luego tenemos que para

$$R = \min \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right\} = \frac{1}{a}$$

Tanto p_n como q_n convergen. Luego $R(a_n) = 1/a$.

- **Caso $x = 1/a$:**

$$a_n = \frac{1}{n} + \left(\frac{b}{a}\right)^n \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n}$$

Como $\sum 1/n$ diverge, nuestra serie diverge por mayoración.

- **Caso $x = -1/a$:**

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \left(\frac{b}{a}\right)^n \frac{1}{n^2} \right)$$

Sabemos que tanto n^{-1} como n^{-2} son decrecientes. Además, como $a > b > 0$, tenemos que $(b/a)^n$ es decreciente. Luego $|a_n|$ es decreciente y además es nula. Luego por Leibnitz converge.

Finalmente $I = [-\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$.

E2. Se resuelve en P4.

E3. Notemos en primer lugar que, haciendo $u = \sin(t) \rightarrow du = \cos(t)dt$, tenemos:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{1 - x \sin^2(t)} dt = \int_0^1 \frac{du}{1 - xu^2}$$

Tenemos por hipótesis que $|x| < 1$, además $|u^2| = |\sin^2(t)| \leq 1$, por lo que $|xu^2| < 1$. Usando la indicación se sigue que:

$$\frac{1}{1 - xu^2} = \sum (xu^2)^k = \sum x^k u^{2k} \quad |x| < 1$$

Además,

$$\int_0^p \left(\sum x^k u^{2k} \right) du = \sum \frac{x^k p^{2k+1}}{2k+1}$$

Juntando todos nuestros resultados (note que nos interesa el caso $p = 1$) concluimos que, para $|x| < 1$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{1 - x \sin^2(t)} dt = \int_0^1 \frac{du}{1 - xu^2} = \int_0^1 \left(\sum x^k u^{2k} \right) du = \sum \frac{x^k}{2k+1}$$

P1.

a) Es análogo al ejercicio E1.j. Tomando $u = x - 1$, vimos que la serie:

$$\sum \left(\frac{a^k}{k} + \frac{b^k}{k^2} \right) u^k \quad a > b > 0$$

Converge para $u \in [-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]$. Luego, como $u = x - 1$, se tiene que la serie converge si:

$$x \in \left[1 - \frac{1}{a}, 1 + \frac{1}{a} \right)$$

b) El razonamiento es similar al hecho en el ejercicio E3. Usando la indicación, obtenemos que:

$$\frac{1}{1 + a^2 t^2} = \sum (-1)^k (a^2 t^2)^k = \sum (-1)^k a^{2k} t^{2k}$$

De donde:

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 + a^2 t^2} = \int_0^1 \left(\sum (-1)^k a^{2k} t^{2k} \right) dt = \sum (-1)^k \frac{a^{2k} 1^{2k+1}}{2k+1} = \sum (-1)^k \frac{a^{2k}}{2k+1}$$

c) Notemos, por otro lado, que si $a \neq 0$,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{dt}{1 + a^2 t^2} \quad u = at \rightarrow du = a dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan(u) \Big|_0^a \\ &= \frac{\arctan(a)}{a} \end{aligned}$$

Juntando esto con la parte (b), tenemos:

$$\frac{\arctan(a)}{a} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + a^2 t^2} = \sum (-1)^k \frac{a^{2k}}{2k+1}$$

Notemos además que podemos ampliar el resultado a $a = 0$. En efecto,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\arctan(a)}{a} \xrightarrow{L'H} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{1 + a^2} = 1$$

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{a^{2k}}{2k+1} = 1 + \left(\sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{a^{2k}}{2k+1} \right) \xrightarrow{a=0} 1 + 0 = 1$$

Luego, definiendo por continuidad $\frac{\arctan(a)}{a} = 1$ cuando $a = 0$, también se cumple la igualdad.

P2.

a) Por la proposición 10.2 sabemos que $R = 1$, ya que $R(\sum x^k) = 1$.

- **Caso $x = 1$:** $a_n = \frac{1}{n}$ conocidamente divergente.
- **Caso $x = -1$:** $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, convergente por Leibnitz (puesto que $|a_n|$ decrece y tiende a cero).

Luego $I = [-1, 1)$.

b) Sea $h(x) = \sum \frac{1}{k} x^k$ y $g(x) = \frac{x}{1-x}$. Luego

$$\sum \frac{1}{k} \left(\frac{x}{1-x} \right)^k = (h \circ g)(x)$$

Como $\text{Dom}(h) = [-1, 1)$, necesitamos que $\left| \frac{x}{1-x} \right| < 1$. Luego:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{x}{1-x} \right| < 1, x \neq 1 \\ \Leftrightarrow & |x| < |1-x| \\ \Leftrightarrow & |x| < 1-x \vee |x| < x-1 \\ \Leftrightarrow & x-1 < x < 1-x \vee 1-x < x < x-1 \end{aligned}$$

Pero siempre se tiene que $x-1 < x$, y, en consecuencia, nunca se tiene $x < x-1$. Luego las desigualdades se reducen a:

$$x < 1-x$$

Lo que se cumple para $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$.

c) Tomando las mismas funciones h y g definidas anteriormente, tenemos que $f = h \circ g$. Recordemos que la función solo está definida para el dominio encontrado en la parte anterior. En particular, recuerde que $\left| \frac{x}{1-x} \right| < 1$. Luego derivando tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(g(x))g'(x) \\ &= \left(\sum \left(\frac{x}{1-x} \right)^{k-1} \right) \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right) \\ &= \left(\lim \frac{1 - \left(\frac{x}{1-x} \right)^n}{1 - \left(\frac{x}{1-x} \right)} \right) \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{(1-x)(1-2x)} \end{aligned}$$

Luego tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-x)(1-2x)} \\ \int_0^x f'(t) dt &= \int_0^x \frac{dt}{(1-t)(1-2t)} \\ f(t) \Big|_0^x &= \int_0^x \left(\frac{2}{1-2t} - \frac{1}{1-t} \right) dt \\ f(x) &= -\ln|1-2x| + \ln|1-x| \Big|_0^x \\ f(x) &= \ln \left| \frac{1-x}{1-2x} \right| \end{aligned}$$

Pero $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \Rightarrow 2x \in (-\infty, 1)$, por lo que tanto $1-x$ como $1-2x$ son positivos. Finalmente

$$f(x) = \ln \left(\frac{1-x}{1-2x} \right) \quad , x \in (-\infty, \frac{1}{2})$$

P3.

- a) Para $\sum \frac{(-1)^k}{k \ln(k)}$ basta ver que $\frac{1}{k \ln(k)} \rightarrow 0$ y es decreciente, por lo que converge por Leibnitz. Para $\sum \frac{1}{k \ln(k)}$ veamos la integral impropia correspondiente. Notemos que:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln(x)} = \ln(\ln(x)) \Big|_2^\infty = \infty \text{ diverge.}$$

Luego la serie diverge por el criterio de la integral impropia.

- b) Notemos que aplicando el criterio del cociente se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} &= |x| \lim \frac{k \ln(k)}{(k+1) \ln(k+1)} \\ &\xrightarrow{L'H} |x| \lim \frac{1 + \ln(k)}{1 + \ln(k+1)} \\ &\xrightarrow{L'H} |x| \lim \frac{k+1}{k} = |x| \end{aligned}$$

Que resulta en convergencia para $|x| < 1$ y en divergencia para $|x| > 1$. El radio de convergencia es entonces $R = 1$. Adicionalmente vemos que, usando lo visto en (a), el intervalo de convergencia es $[-1, 1)$.

c) $f(x) = \sum \frac{x^k}{k(k+1)}$

(c1) Recordemos que $\sum |x|^k$ posee $R = 1$, lo mismo para $\sum \frac{|x|^k}{k^2}$ por la proposición 10.2. Esta última serie es muy similar a $f(x)$. En efecto vea que, por el criterio de comparación por cociente:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^k}{k(k+1)}}{\frac{|x|^k}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{k(k+1)} = 1 > 0$$

Por lo que las series se comportan igual. En conclusión, el radio de convergencia de $f(x)$ es $R = 1$.

(c2) Para $x \in (-1, 1)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} (xf(x))'' &= \left(\sum \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \right)'' = \left(\sum \frac{x^k}{k} \right)' = \sum x^{k-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} \end{aligned}$$

(c3) Por simple evaluación en $x = 0$ vemos que $xf(x) = (xf(x))' = 0$. Según lo calculado en la parte anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} (1) \int_0^x (tf(t))'' dt &= (tf(t))' \Big|_0^x = (xf(x))' \\ (2) \int_0^x (tf(t))'' dt &= \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x) \end{aligned}$$

De donde concluimos que $(xf(x))' = -\ln(1-x)$. Repitiendo el mismo razonamiento tenemos:

$$\begin{aligned} (1) \int_0^x (tf(t))' dt &= tf(t) \Big|_0^x = xf(x) \\ (2) \int_0^x (tf(t))' dt &= \int_0^x -\ln(1-t) dt \quad ; u = 1-t \rightarrow du = -dt \\ &= \int_1^{1-x} \ln(u) = u(\ln(u) - 1) \Big|_1^{1-x} \\ &= (1-x)(\ln(1-x) - 1) + 1 \end{aligned}$$

De donde concluimos que $xf(x) = (1-x)(\ln(1-x) - 1) + 1$. Tomando $x \neq 0$ se concluye lo pedido:

$$f(x) = \frac{1 + (1-x)(\ln(1-x) - 1)}{x}$$

P4.

- a) Para $|x| < 1$ es claramente convergente por Leibnitz. Además en $x = 1$ la serie es divergente puesto que $(-1)^k \not\rightarrow 0$. Luego, para $|x| > 1$ la serie diverge y $R = 1$.

Caso $x = -1$: $\sum (-1)^n (-1)^{2n} = \sum (-1)^n$ divergente.

Luego $I = (-1, 1)$. Con $x \in I$ es sencillo encontrar la función asociada resolviendo la sumatoria geométrica.

$$\sum_0^n (-1)^k x^{2k} = \sum_0^n (-x^2)^k = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 + x^2}$$

Como $|x| < 1 \Rightarrow |-x^2| < 1$, se tiene sacando el límite que:

$$\sum (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad |x| < 1$$

- b) Notemos de la parte anterior que nuestra serie resulta ser igual a $\frac{1}{1+x^2}$, que es justamente la derivada de $\arctan(x)$. Veamos entonces que:

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_0^x \sum (-1)^n t^{2n} dt &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(x) \\ (2) \quad \int_0^x \sum (-1)^n t^{2n} dt &= \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

Se concluye que para $|x| < 1$ se cumple

$$\arctan(x) = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

- c) Es inmediato intentar usar la parte (b) para relacionar π con alguna serie. Recordemos que necesitamos que $|x| < 1$. Podríamos usar $x = 1/\sqrt{3}$ en donde la arcotangente vale $\pi/6$. Luego

$$\pi = 6 \arctan(1/\sqrt{3})$$

Y reemplazando en la serie encontrada:

$$\pi = 6 \sum \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{2n+1} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 2\sqrt{3} \sum \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$$

P5.

a)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right)$$

Veamos el desarrollo en serie de potencias de $\frac{1}{x-1}$ y $\frac{1}{x+2}$ (centradas en cero). Para ello ocuparemos dos métodos.

Encontrar las series de Taylor en cero:

(1) $g(x) = \frac{1}{x-1}$. Derivando encontramos que:

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-1)^{-1} \\ g(x)' &= (-1)(x-1)^{-2} \\ g(x)'' &= (-1)(-2)(x-1)^{-3} \\ &\vdots \\ g^{(k)}(x) &= (-1)(-2)\dots(-k)(x-1)^{-(k+1)} = \frac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}} \end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$\begin{aligned} g^{(k)}(0) &= \frac{(-1)^k k!}{(-1)^{k+1}} = -k! \\ g(x) &= \sum \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum -x^k, \quad R_g = 1 \end{aligned}$$

(2) $h(x) = \frac{1}{x+2}$. Puesto que $(x-1)' = (x+2)' = 1$, la derivación es totalmente análoga, por lo que:

$$\begin{aligned} h^{(k)}(x) &= \frac{(-1)^k k!}{(x+2)^{k+1}} \\ h^{(k)}(0) &= \frac{(-1)^k k!}{2^{k+1}} \\ h(x) &= \sum \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum (-1)^k \frac{x^k}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

Donde por Leibnitz es directo que converge por lo menos para $(-1, 1)$. Por lo tanto, la suma de estas series tiene $R = 1$ y resulta en:

$$f(x) = \frac{1}{3} \left(\sum -x^k - \sum (-1)^k \frac{x^k}{2^{k+1}} \right) = \sum \frac{1}{3} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} - 1 \right) x^k$$

Encontrar las series por medio de la serie geométrica:

Para esto recordamos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad R = 1$$

Luego tenemos que:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{1-x} = -\sum x^k, \quad R_g = 1 \\ h(x) &= \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \sum \left(-\frac{x}{2}\right)^k = \sum (-1)^k \frac{x^k}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

Determinar el radio de la serie de $h(x)$ es directo al notar que el paso a la suma geométrica necesita que:

$$\left| -\frac{x}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Rightarrow R_h = 2$$

Por lo tanto la suma de las series converge para el radio menor, es decir, $R = 1$. Concluimos el mismo resultado:

$$f(x) = \frac{1}{3} \left(\sum -x^k - \sum (-1)^k \frac{x^k}{2^{k+1}} \right) = \sum \frac{1}{3} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} - 1 \right) x^k$$

Para el Intervalo de Convergencia, estudiemos los casos $x = 1$ y $x = -1$.

Caso $x = 1$:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} - 1 \right) x^k = \frac{1}{3} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} - 1 \right) \not\rightarrow 0$$

Por lo tanto la serie no puede converger.

Caso $x = (-1)$:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} - 1 \right) x^k = \frac{1}{3} \left(\frac{(-1)^{k+1}(-1)^k}{2^{k+1}} - (-1)^k \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{2^{k+1}} - (-1)^k \right) \not\rightarrow 0$$

Por lo tanto la serie no puede converger. Se concluye que $I = (-1, 1)$.

b)

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1+2x)} = \frac{-1}{3} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{1+2x} \right)$$

Por la parte (a) ya sabemos que $\frac{1}{x-1} = \sum -x^k$ para $x \in (-1, 1)$. Para el otro término procedamos como antes:

Encontrar la serie de Taylor en cero:

Derivando obtenemos:

$$\begin{aligned} g(x) &= (1+2x)^{-1} \\ g(x)' &= (-1)(1+2x)^{-2} \cdot 2 \\ g(x)'' &= (-1)(-2)(1+2x)^{-3} \cdot 2^2 \\ &\vdots \\ g^{(k)}(x) &= (-1)(-2) \dots (-k)(1+2x)^{-(k+1)} \cdot 2^k = \frac{(-1)^k 2^k k!}{(1+2x)^{k+1}} \end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$\begin{aligned} g^{(k)}(0) &= (-1)^k 2^k k! \\ g(x) &= \sum \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum (-1)^k 2^k x^k \\ R_g &= \frac{1}{\lim \sqrt[k]{|(-1)^k 2^k|}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Juntando ambas series con el radio menor $R = \frac{1}{2}$ obtenemos:

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1+2x)} = \frac{-1}{3} \left(\sum -x^k + \sum (-1)^k 2^k x^k \right) = \sum \frac{1}{3} \left((-1)^{k+1} 2^k + 1 \right) x^k$$

Encontrar la serie por medio de la serie geométrica:

$$g(x) = \frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = \sum (-2x)^k = \sum (-1)^k 2^k x^k$$

Donde el radio es directo de que para la suma geométrica necesitamos:

$$|-2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow R_g = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto la suma de las series converge para el radio menor, es decir, $R = \frac{1}{2}$. Concluimos el mismo resultado:

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1+2x)} = \frac{-1}{3} \left(\sum -x^k + \sum (-1)^k 2^k x^k \right) = \sum \frac{1}{3} \left((-1)^{k+1} 2^k + 1 \right) x^k$$

Para el Intervalo de Convergencia, estudiemos los casos $x = 1/2$ y $x = -1/2$.

Caso $x = 1/2$:

$$\frac{1}{3} \left((-1)^{k+1} 2^k + 1 \right) x^k = \frac{1}{3} \left((-1)^{k+1} 2^k + 1 \right) \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{1}{3} \left((-1)^{k+1} + \left(\frac{1}{2} \right)^k \right) \not\rightarrow 0$$

Por lo tanto la serie no puede converger.

Caso $x = -1/2$:

$$\frac{1}{3} \left((-1)^{k+1} 2^k + 1 \right) x^k = \frac{1}{3} \left((-1)^{k+1} 2^k + 1 \right) \left(\frac{-1}{2} \right)^k = \frac{1}{3} \left(-1 + \left(\frac{-1}{2} \right)^k \right) \not\rightarrow 0$$

Por lo tanto la serie no puede converger. Se concluye que $I = (-1/2, 1/2)$.

Notas:

- Note la facilidad para obtener series de expresiones de la forma $\frac{A}{Bx+C}$ (donde A, B, C son constantes) utilizando la serie geométrica.
- Las series fueron comprobadas mediante WolframAlpha.