

SOLUCIÓN APUNTE MA1002

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

SEMANA 2

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas
Use este material con responsabilidad.

P1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$.

- a) Puesto que f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, por el teorema de Weierstrass f alcanza su mínimo y su máximo. Sean entonces $m, M \in [a, b]$ valores del dominio en que f toma su mínimo y su máximo valor respectivamente. Esto es:

$$f(m) \leq f(x) \leq f(M), \quad \forall x \in [a, b]$$

Sean ahora $x_1, x_2 \in [a, b]$ arbitrarios. Sabemos que se cumple:

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(m) \leq f(x_1) \leq f(M) \\ (2) \quad & f(m) \leq f(x_2) \leq f(M) \end{aligned}$$

Por lo que sumando (1) con (2) obtenemos:

$$2f(m) \leq f(x_1) + f(x_2) \leq 2f(M) \Leftrightarrow f(m) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(M)$$

Y puesto que x_1 y x_2 son arbitrarios, lo anterior es válido $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$. Luego simplemente tomando $\underline{x} = m$ y $\bar{x} = M$ se tiene lo pedido.

- b) Sean $x_1, x_2 \in [a, b]$ cualquiera. Puesto que f es continua en $[a, b]$ y $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ se encuentra comprendido entre dos imágenes de la función (gracias a lo visto en la parte anterior), por el TVI se concluye que existe $\beta \in [a, b]$ tal que:

$$f(\beta) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

P2. En lugar de demostrar que $f(\bar{x}) = f(\bar{x} + a)$, demostraremos que $f(\bar{x}) - f(\bar{x} + a) = 0$, puesto que es una forma típica de aplicar el TVI en la forma particular del teorema 1.6 del apunte. Sea entonces la función $g : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) - f(x + a)$. Esta función es claramente continua por álgebra de funciones continuas. Además vemos que:

$$\begin{aligned} (1) \quad & g(0) = f(0) - f(a) \\ (2) \quad & g(a) = f(a) - f(2a) = f(a) - f(0) \end{aligned}$$

Lo último gracias a que $f(2a) = f(0)$. Vemos entonces que se tiene

$$g(0)g(a) = -(f(0) - f(a))^2 \leq 0$$

Y por el TVI se tiene que existe $\bar{x} \in [0, a]$ tal que

$$g(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{x} + a)$$

P3.

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

a) La continuidad de $\tanh(x)$ es consecuencia directa del álgebra de funciones continuas. La función exponencial es continua en todo \mathbb{R} , la función $-x$ es también continua en todo \mathbb{R} , por lo que la composición e^{-x} también lo es. Luego $e^x - e^{-x}$ y $e^x + e^{-x}$ son continuas en todo \mathbb{R} , y puesto que $e^x + e^{-x}$ jamás se anula, se concluye que su cociente también lo es.

Evalutando en $x = 0$ se obtiene:

$$\tanh(0) = \frac{e^0 - e^0}{e^0 + e^0} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

Finalmente, puesto que sabemos que la función exponencial siempre es positiva, se cumple para todos los reales que:

$$\begin{aligned} (1) \quad & -e^x < e^x \\ (2) \quad & -e^{-x} < e^{-x} \end{aligned}$$

Restando e^{-x} en (1) se obtiene:

$$-e^x - e^{-x} < e^x - e^{-x} \Leftrightarrow -(e^x + e^{-x}) < e^x - e^{-x} \Leftrightarrow -1 < \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Sumando e^x en (2) se obtiene:

$$e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x} \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1$$

Juntando ambas desigualdades obtenemos

$$\begin{aligned} -1 &< \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1 \\ \Leftrightarrow \quad &-1 < \tanh(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b)

$$\tanh(n) = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$$

$$(1) \text{ Simplificando por } e^n: \tanh(n) = \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}}$$

$$(2) \text{ Simplificando por } e^{-n}: \tanh(n) = \frac{e^{2n} - 1}{e^{2n} + 1}$$

Recordemos que $e^{-n} \rightarrow 0$, por lo que usando (1) obtenemos:

$$\tanh(n) = \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} \rightarrow \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

Y usando (2) obtenemos:

$$\tanh(-n) = \frac{e^{-2n} - 1}{e^{-2n} + 1} \rightarrow \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

c) Notemos en primer lugar que $\tanh(n) \rightarrow 1$ y $\tanh(-n) \rightarrow -1$ significan que:

$$(i) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n'_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n'_0, 1 - \varepsilon \leq \tanh(n) \leq 1 + \varepsilon$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n''_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n''_0, -1 - \varepsilon \leq \tanh(-n) \leq -1 + \varepsilon$$

Sea ahora $y \in (-1, 1)$ arbitrario. Debido a la densidad en \mathbb{R} , existen $a, b \in \mathbb{R}$ positivos tales que

$$-1 < -1 + a < y < 1 - b < 1$$

Para b , según (i), $\exists n'_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1 - b < \tanh(n)$ para todo $n \geq n'_0$. Por otro lado, para a , según (ii), $\exists n''_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\tanh(-n) < -1 + a$ para todo $n \geq n''_0$. Luego, para $n_0 = \max\{n'_0, n''_0\}$ se cumple para todo $n \geq n_0$ que:

$$\tanh(-n) < -1 + a < y < 1 - b < \tanh(n)$$

Tomando simplemente $n = n_0$ llegamos a que $\tanh(-n_0) < y < \tanh(n_0)$. Puesto que y está comprendido entre dos imágenes de una función continua, podemos usar el TVI para concluir que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\tanh(x) = y$. Dada la arbitrariedad de y , el resultado es válido para todo $y \in (-1, 1)$.

d) Sea $h(x) = \tanh(x) - \cos(x)$ una función continua por álgebra de funciones continuas. Demostraremos que $h(x)$ tiene infinitos ceros. La idea es la siguiente: la función $\tanh(x)$ siempre está entre 1 y (-1) sin tomar estos dos valores, y la función $\cos(x)$ toma ambos valores de forma periódica, de modo que la función $h(x)$ constantemente cambia de signo, ya que estamos seguros de que cuando el coseno vale 1 es mayor que $\tanh(x)$, y es menor cuando vale (-1) . Buscaremos entonces esos cambios de signo.

Note que en los intervalos de la forma $[k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ siempre ocurre que:

$$(\cos(k\pi) = 1 \wedge \cos((k+1)\pi) = -1) \vee (\cos(k\pi) = -1 \wedge \cos((k+1)\pi) = 1)$$

Y ya que siempre se cumple que $-1 < \tanh(x) < 1$, se tendrá que:

$$(h(k\pi) < 0 \wedge h((k+1)\pi) > 0) \vee (h(k\pi) > 0 \wedge h((k+1)\pi) < 0)$$

En ambos casos se tendrá que $h(k\pi)h((k+1)\pi) \leq 0$, y usando la continuidad de $h(x)$ con el TVI concluimos que existe $x_0 \in [k\pi, (k+1)\pi]$ tal que:

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \tanh(x_0) = \cos(x_0)$$

Es decir, x_0 es solución de la ecuación del problema, y puesto que existen infinitos intervalos $[k\pi, (k+1)\pi]$ distintos entre sí, se tendrá la existencia de infinitas soluciones.

P4. Intentaremos definir una función conveniente para este problema de modo que sus ceros sean precisamente los instantes de ambos días en que el monje se encuentra a la misma distancia del monasterio.

Sea la función $subida(t)$ que indica la distancia al monasterio a la hora t del día 7. De forma análoga se define la función $bajada(t)$ que indica la distancia al monasterio a la hora t del día 8. Supongamos que la cumbre de la montaña está a una distancia L y note que el monje al inicio del día 7 se encuentra en el monasterio al igual que al final del día 8. Además, el monje al final del día 7 se encuentra en la cumbre al igual que en el inicio del día 8. Esto lo traducimos como:

$$subida(0) = bajada(24) = 0 \quad subida(24) = bajada(0) = L$$

Definimos la función $h(t) = subida(t) - bajada(t)$, $t \in [0, 24]$, cuyos ceros nos indican precisamente los instantes de coincidencia que buscamos. Evaluando en los extremos del intervalo vemos que:

$$\left. \begin{array}{l} h(0) = 0 - L = -L \\ h(24) = L - 0 = L \end{array} \right\} \Rightarrow h(0)h(24) = -L^2 \leq 0$$

Suponiendo que las funciones de subida y bajada son continuas (es decir, que el monje no se teletransporta o algo por el estilo), podemos usar el TVI para concluir que existe $t_0 \in [0, 24]$ tal que

$$h(t_0) = 0 \Leftrightarrow subida(t_0) = bajada(t_0)$$

Es decir, a la misma hora en el día 7 y el día 8 el monje se halla a la misma distancia del monasterio.

P5. Al camino recorrido por el conductor lo dotamos de la función $d : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ que entrega su posición en el camino en función del tiempo (medido en horas). Supondremos que esta función es continua, lo cual es razonable dada la forma de moverse de un auto. Sea ahora la función $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = d(t+1) - d(t)$, es decir, la distancia recorrida en lapsos de exactamente una hora. Note que la distancia total recorrida está dada por

$$D = d(5) - d(0) = \sum_{k=0}^4 d(k+1) - d(k) = \sum_{k=0}^4 f(k)$$

En donde se debe cumplir necesariamente que $D = 500$.

Buscamos $t_0 \in [0, 4]$ tal que $f(t_0) = 100$. Supongamos que $f(t) > 100$, $\forall t$. En particular se tendría que:

$$D = \sum_{k=0}^4 f(k) > 500$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\exists t \in [0, 4]$ tal que $f(t) \leq 100$. De forma análoga supongamos que $f(t) < 100$, $\forall t$. En particular se tendría que:

$$D = \sum_{k=0}^4 f(k) < 500$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\exists t \in [0, 4]$ tal que $f(t) \geq 100$. En definitiva, existen t_1 y t_2 no necesariamente diferentes tales que:

$$f(t_1) \leq 100 \leq f(t_2)$$

Gracias al TVI existe t_0 entre t_1 y t_2 tal que $f(t_0) = 100$, que era lo que queríamos demostrar.

P6. Creo que el enunciado debería decir $g(x) = -(b-x)^n$. De otro modo se llegan a contradicciones. Asumiendo esto continuamos.

Se tienen f y g continuas en $[a, b]$ con $f(a) \neq f(b)$, $f(a) = -g(b)$ y $f(b) = -g(a)$. Buscaremos un cero para la función $h(x) = f(x) + g(x)$ continua por álgebra de funciones continuas. Evaluando en los extremos del intervalo obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} h(a) = f(a) + g(a) = f(a) - f(b) \\ h(b) = f(b) + g(b) = f(b) - f(a) \end{array} \right\} \Rightarrow h(a)h(b) = -(f(a) - f(b))^2 \leq 0$$

Luego, por el TVI $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = -g(x_0)$$

Para el caso particular de $f(x) = (x-a)^n$ y $g(x) = -(b-x)^n$, se verifican rápidamente las hipótesis:

$$\begin{array}{ll} f(a) = 0 & -g(b) = 0 \\ f(b) = (b-a)^n & -g(a) = (b-a)^n \end{array}$$

Por lo que $f(a) = -g(b)$ y $f(b) = -g(a)$. Además, $a < b \Rightarrow (b-a)^n \neq 0 \Rightarrow f(a) \neq f(b)$. Luego tenemos que $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = -g(x_0)$. Recordando que:

$$x \in [a, b] \Rightarrow (x-a) \geq 0 \wedge (b-x) \geq 0$$

Podemos calcular x_0 simplemente sacando raíz n -ésima, puesto que las bases siempre son no-negativas:

$$\begin{array}{rcl} (x_0 - a)^n & = & (b - x_0)^n \\ x_0 - a & = & b - x_0 \\ x_0 & = & \frac{a+b}{2} \end{array}$$

P7. Es idéntica a la P5 de la Semana 1.

P8. Se tiene $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua. Sea la función $g(x) = f(x) - x$. Recordemos que, como $f(x) \in [a, b]$, se debe cumplir $a \leq f(x) \leq b$, $\forall x \in [a, b]$. Evaluando g en los extremos del intervalo obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} g(a) = f(a) - a \geq 0 \\ g(b) = f(b) - b \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(a)g(b) \leq 0$$

Puesto que la función g es continua por álgebra de funciones continuas, se puede utilizar el TVI para concluir que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$$