

SOLUCIÓN APUNTE MA1002

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

SEMANA 12

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas
Use este material con responsabilidad.

P1. Usando la indicación, sea:

$$\theta(s) = \int_0^s g(\tau) d\tau \quad x(s) = \int_0^s \cos \theta(\tau) d\tau \quad y(s) = \int_0^s \sin \theta(\tau) d\tau$$

Y sea $\vec{r}(s) = (x(s), y(s))$ la parametrización de una curva Γ , con $\vec{r}: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Debido a la definición de $\theta(s)$ y que g tiene por dominio $[0, \ell]$, tiene sentido definir a \vec{r} de esta manera. Veamos que:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{ds} &= (x', y') \xrightarrow{TFC} (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) \\ \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| &= \sqrt{\cos^2(\theta(s)) + \sin^2(\theta(s))} = 1 \end{aligned}$$

Luego, si $\phi(s)$ es la función de longitud de arco, entonces:

$$\phi(s) = \int_0^s \left\| \frac{d\vec{r}}{ds}(\tau) \right\| d\tau = \int_0^s d\tau = s$$

Es decir, s es la función de longitud de arco, por lo que la longitud de Γ es $\phi(\ell) = \ell$. Además, \vec{r} es parametrización natural, y:

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{d\vec{r}}{ds} = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))) \\ \frac{dT}{ds}(s) &= (-\sin(\theta(s)) \cdot \theta'(s), \cos(\theta(s)) \cdot \theta'(s)) \\ &= g(s)(-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s))) \\ \left\| \frac{dT}{ds}(s) \right\| &= |g(s)| \sqrt{\sin^2(\theta(s)) + \cos^2(\theta(s))} = |g(s)| \end{aligned}$$

Y como la curvatura está dada por:

$$\kappa(s) = \left\| \frac{dT}{ds}(s) \right\| = |g(s)|$$

Se tiene lo pedido.

P2. Se tiene que $\vec{r}(x) = (x, f(x))$; $x \in [a, b]$ es una parametrización de Γ , pues es el grafo de f .

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = (1, f'(x)) \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{r}}{dx} \right\| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Por lo que la longitud de la curva está dada por:

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Además tenemos que:

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{d\vec{r}}{dx} / \left\| \frac{d\vec{r}}{dx} \right\| = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}, \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right) \\ \frac{dT}{dx} &= \left(-\frac{f'(x)f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}, \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} \right) \\ \left\| \frac{dT}{dx} \right\|^2 &= \left(\frac{f'(x)f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} \right)^2 + \left(\frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} \right)^2 \\ &= (1 + (f'(x))^2) \left(\frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} \right)^2 \\ \Rightarrow \left\| \frac{dT}{dx} \right\| &= \sqrt{1 + (f'(x))^2} \frac{|f''(x)|}{|1 + (f'(x))^2|^{3/2}} \\ \Rightarrow \kappa(x) &= \left\| \frac{dT}{dx} \right\| / \left\| \frac{d\vec{r}}{dx} \right\| = \frac{|f''(x)|}{|1 + (f'(x))^2|^{3/2}} \end{aligned}$$

P3.

a) Deseamos demostrar que:

$$\tau(s) = \frac{\langle \sigma'(s) \times \sigma''(s), \sigma'''(s) \rangle}{\|\sigma''(s)\|^2}$$

Antes de continuar veamos que la derivada de una norma es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|r(t)\| &= \frac{d}{dt} \sqrt{\langle r(t), r(t) \rangle} = \frac{\langle r(t), r(t) \rangle'}{2\sqrt{\langle r(t), r(t) \rangle}} \\ &= \frac{\langle r'(t), r(t) \rangle + \langle r(t), r'(t) \rangle}{2\sqrt{\langle r(t), r(t) \rangle}} = \frac{\langle r(t), r'(t) \rangle}{\sqrt{\langle r(t), r(t) \rangle}} \\ &= \frac{\langle r(t), r'(t) \rangle}{\|r(t)\|} \end{aligned}$$

A continuación aceptaremos que $\sigma'(s) = \sigma'$, $\sigma''(s) = \sigma''$ y $\sigma'''(s) = \sigma'''$ por facilidad en la escritura. Recordando las definiciones tenemos que:

$$\begin{aligned} T(s) &= \sigma' \\ N(s) &= T'(s) / \|T'(s)\| = \frac{\sigma''}{\|\sigma''\|} \\ B(s) &= T(s) \times N(s) = \sigma' \times \frac{\sigma''}{\|\sigma''\|} \end{aligned}$$

Veamos cómo se expresa $\frac{dB}{ds}(s)$. Para esto, usaremos la propiedad de la derivada de un producto y de un cuociente, que sirven también para vectores, y para el producto punto y escalar.

$$\begin{aligned}
 \frac{dB}{ds}(s) &= \frac{d}{ds} \left(\sigma' \times \frac{\sigma''}{\|\sigma''\|} \right)' \\
 &= \sigma'' \times \frac{\sigma'''}{\|\sigma''\|} + \sigma' \times \left(\frac{\sigma''}{\|\sigma''\|} \right)' \quad \text{Pero } \sigma'' \times \sigma'' = 0 \\
 &= \sigma' \times \left(\frac{\sigma''' \|\sigma''\| - \sigma'' \|\sigma''\|'}{\|\sigma''\|^2} \right) \\
 &= \sigma' \times \left(\frac{\sigma'''}{\|\sigma''\|} - \frac{\sigma'' \langle \sigma'', \sigma''' \rangle}{\|\sigma''\|^3} \right) \\
 &= (\sigma' \times \sigma''') \frac{1}{\|\sigma''\|} - (\sigma' \times \sigma'') \frac{\langle \sigma'', \sigma''' \rangle}{\|\sigma''\|^3}
 \end{aligned}$$

Luego, recordando que $\tau(s) = \langle -N, \frac{dB}{ds} \rangle$, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \tau(s) &= \left\langle -\frac{\sigma''}{\|\sigma''\|}, (\sigma' \times \sigma''') \frac{1}{\|\sigma''\|} - (\sigma' \times \sigma'') \frac{\langle \sigma'', \sigma''' \rangle}{\|\sigma''\|^3} \right\rangle \\
 &= -\left\langle \frac{\sigma''}{\|\sigma''\|}, (\sigma' \times \sigma''') \frac{1}{\|\sigma''\|} \right\rangle + \left\langle \frac{\sigma''}{\|\sigma''\|}, (\sigma' \times \sigma'') \frac{\langle \sigma'', \sigma''' \rangle}{\|\sigma''\|^3} \right\rangle
 \end{aligned}$$

Pero σ'' es ortogonal a $\sigma' \times \sigma''$, por lo que $\langle \sigma'', \sigma' \times \sigma'' \rangle$ es nulo y el segundo miembro de la expresión se anula. Simplemente nos queda:

$$\tau(s) = -\left\langle \frac{\sigma''}{\|\sigma''\|}, (\sigma' \times \sigma''') \frac{1}{\|\sigma''\|} \right\rangle = \frac{-\langle \sigma'', \sigma' \times \sigma''' \rangle}{\|\sigma''\|^2}$$

Notemos que esto es *casi* lo que buscamos, puesto que en el numerador tenemos $-\langle \sigma'', \sigma' \times \sigma''' \rangle$ y necesitamos $\langle \sigma''', \sigma' \times \sigma'' \rangle$. Note que ambas expresiones pueden obtenerse a partir de la derivación de $\langle \sigma'', \sigma' \times \sigma'' \rangle$. Esta expresión es de interés puesto que sabemos que es nula. Luego podemos obtener:

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma'', \sigma' \times \sigma'' \rangle &= 0 \quad \frac{d}{ds} () \\
 \langle \sigma''', \sigma' \times \sigma'' \rangle + \langle \sigma'', (\sigma' \times \sigma'')' \rangle &= 0 \\
 \langle \sigma''', \sigma' \times \sigma'' \rangle + \langle \sigma'', \sigma'' \times \sigma'' + \sigma' \times \sigma''' \rangle &= 0 \\
 \langle \sigma''', \sigma' \times \sigma'' \rangle + \langle \sigma'', \sigma' \times \sigma''' \rangle &= 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $-\langle \sigma'', \sigma' \times \sigma''' \rangle = \langle \sigma''', \sigma' \times \sigma'' \rangle$ y reemplazando esto obtenemos el resultado deseado:

$$\tau(s) = \frac{\langle \sigma''', \sigma' \times \sigma'' \rangle}{\|\sigma''\|^2}$$

b) $\vec{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t), \sin(t), t)$. Veamos que:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(t), \cos(t), 1) \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = 1$$

Por lo que:

$$s(t) = \int_0^t \left\| \frac{d\vec{r}}{d\tau}(\tau) \right\| d\tau = \int_0^t d\tau = t$$

Es decir, $\vec{r}(t)$ es la parametrización natural $\sigma(s)$ correspondiente. Luego:

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(s), \sin(s), s) \quad ; \quad \sigma''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos(s), -\sin(s), 0) \\ \sigma'(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(s), \cos(s), 1) \quad ; \quad \sigma'''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(s), -\cos(s), 0) \\ \|\sigma''(s)\| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos^2(s) + \sin^2(s)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{1}{\|\sigma''(s)\|^2} = 2 \\ \sigma'(s) \times \sigma''(s) &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin(s) & \cos(s) & 1 \\ -\cos(s) & -\sin(s) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\sin(s), -\cos(s), 1) \\ \tau(s) &= \frac{(\sigma'(s) \times \sigma''(s)) \cdot \sigma'''(s)}{\|\sigma''(s)\|^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(s), -\cos(s), 1) \cdot (\sin(s), -\cos(s), 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

P4. Se considera la curva Γ que se forma al intersectar las superficies

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ x^2 + z^2 &= 4 + y^2 \end{aligned}$$

Donde se toma en cuenta solo la parte de la curva con $z > 0$.

a) Usando la indicación, sea la parametrización:

$$\vec{r}(\rho, \theta, z) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z)$$

Como sabemos que se debe cumplir el sistema de ecuaciones, tenemos necesariamente que:

$$\begin{aligned} \rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta) &= 4 \Rightarrow \rho = 2 \\ \rho^2 \cos^2(\theta) + z^2 &= 4 + \rho^2 \sin^2(\theta) \\ \Rightarrow z^2 &= 4 - 4 \cos^2(\theta) + 4 \sin^2(\theta) = 4(1 - \cos^2(\theta)) + 4 \sin^2(\theta) = 8 \sin^2(\theta) \\ \Rightarrow z &= 2\sqrt{2} |\sin(\theta)| \end{aligned}$$

Lo último puesto que se pide solo $z > 0$. La parametrización resultante es:

$$\vec{r}(\theta) = (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), 2\sqrt{2} |\sin(\theta)|), \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

b) Pendiente.

P5. $\vec{r}(t) = (6t^2, 4\sqrt{2}t^3, 3t^4), t \in [0, 1]$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (12t, 12\sqrt{2}t^2, 12t^3) = 12t(1, \sqrt{2}t, t^2)$$

$$\Rightarrow \|\dot{\vec{r}}(t)\| = 12t\sqrt{1 + 2t^2 + t^4} = 12t\sqrt{(1 + t^2)^2} = 12t(1 + t^2)$$

a) $\rho(\vec{r}(t)) = t^2$. Luego:

$$M = \int_0^1 \rho(\vec{r}(t)) \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt = \int_0^1 12t^3(1 + t^2) dt = 12 \int_0^1 (t^3 + t^5) dt$$

$$M = 12 \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6} \right) \Big|_0^1 = 12 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) = 3 + 2 = 5$$

b) El origen se encuentra justamente en $\vec{r}(t = 0)$, por lo que la distancia al origen a lo largo de la curva es simplemente la función de longitud de arco. Entonces $\rho(\vec{r}(t)) = s(t) + 1$ y:

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\vec{r}}(\tau)\| d\tau = \int_0^t 12\tau(1 + \tau^2) d\tau = 12 \int_0^t (\tau + \tau^3) d\tau$$

$$s(t) = 12 \left(\frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{4} \right) \Big|_0^t = 6t^2 + 3t^4 \Rightarrow \rho(\vec{r}(t)) = 3t^4 + 6t^2 + 1$$

$$M = \int_0^1 \rho(\vec{r}(t)) \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt = 12 \int_0^1 (3t^7 + 3t^6 + 6t^5 + 6t^4 + t^3 + t^2) dt$$

$$M = 12 \left(\frac{3}{8}t^8 + \frac{3}{7}t^7 + t^6 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2803}{70}$$

c) Pendiente.

P6. $\vec{r}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t), 0)$

a) $\dot{\vec{r}}(t) = (-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t), 0)$. Luego:

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = 3\sqrt{\cos^4(t)\sin^2(t) + \sin^4(t)\cos^2(t)} = 3\sqrt{\sin^2(t)\cos^2(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t))} = 3|\sin(t)\cos(t)|$$

Como el vector tangente se define como:

$$T(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|}$$

Es claro que no está definido para normas nulas de $\dot{\vec{r}}(t)$. Luego, en este caso, no está definido para $t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$. Como la normal, el binormal, la curvatura y la torsión provienen del vector tangente, también dejan de estar definidos para esos valores de t . Ya que la norma de $\dot{\vec{r}}(t)$ posee un módulo, se hace necesario separar los casos:

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = 3\sin(t)\cos(t), \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = -3\sin(t)\cos(t), \quad t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

Resumamos esto en una constante s que vale 1 o -1 según corresponda para los intervalos recién mencionados. Es claro que $s^{-1} = s$, $|s| = 1$ y $s^2 = 1$. Luego tenemos que:

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = 3s\sin(t)\cos(t)$$

$$T(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|} = \frac{(-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t), 0)}{3s\sin(t)\cos(t)} = s(-\cos(t), \sin(t), 0)$$

$$\frac{dT}{dt}(t) = s(\sin(t), \cos(t), 0) \Rightarrow \left\| \frac{dT}{dt}(t) \right\| = 1$$

$$N(t) = \frac{dT}{dt}(t) / \left\| \frac{dT}{dt}(t) \right\| = s(\sin(t), \cos(t), 0)$$

$$B(t) = T(t) \times N(t) = s^2(-\cos(t), \sin(t), 0) \times (\sin(t), \cos(t), 0)$$

$$B(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\cos(t) & \sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \end{vmatrix} = (-\cos^2(t) - \sin^2(t))\hat{k} = -\hat{k} = (0, 0, -1)$$

$$\kappa(t) = \frac{dT}{dt}(t) / \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| = \frac{1}{3s\sin(t)\cos(t)} = \frac{s}{3\sin(t)\cos(t)}$$

$$\frac{dB}{dt} = (0, 0, 0) = 0 \Rightarrow \tau(t) = -N \cdot \left(\frac{dB}{ds} / \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| \right) = 0$$

b) Recordando que $\|\dot{\vec{r}}(t)\| = 3|\sin(t)\cos(t)| = \frac{3}{2}|\sin(2t)|$, tenemos que:

$$s(t) = \frac{3}{2} \int_0^t |\sin(2t)| dt$$

Debido al valor absoluto, resolveremos la integral por intervalos.

1) $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$s(t) = \frac{3}{2} \int_0^t \sin(2u) du = \frac{3}{4} \cos(2u) \Big|_t^0 = \frac{3}{4}(1 - \cos(2t))$$

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}(1 - \cos(\pi)) = \frac{3}{2}$$

2) $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

$$s(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^t \sin(2u) du = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \cos(2u) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^t = \frac{3}{4}(3 + \cos(2t))$$

$$s(\pi) = \frac{3}{4}(3 + \cos(2\pi)) = 3$$

3) $t \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$.

$$s(t) = 3 + \frac{3}{2} \int_{\pi}^t \sin(2u) du = 3 + \frac{3}{4} \cos(2u) \Big|_{\pi}^t = \frac{3}{4}(5 - \cos(2t))$$

$$s\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}(5 - \cos(3\pi)) = \frac{9}{2}$$

4) $t \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

$$s(t) = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} \int_{\frac{3\pi}{2}}^t \sin(2u) du = \frac{9}{2} + \frac{3}{4} \cos(2u) \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^t = \frac{3}{4}(7 + \cos(2t))$$

$$s(2\pi) = \frac{3}{4}(7 + \cos(4\pi)) = 6$$

El largo total de la curva es simplemente $s(2\pi) = 6$. Es interesante notar que podemos resumir nuestros resultados en:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{3}{4} \left(2n + 1 - \cos \left(2 \left(t - n \frac{\pi}{2} \right) \right) \right) \\ &= \frac{3n}{2} + \frac{3}{4} (1 - \cos(2t - n\pi)), \quad t \in \left[n \frac{\pi}{2}, (n+1) \frac{\pi}{2} \right] \\ s \left(n \frac{\pi}{2} \right) &= \frac{3n}{2} \end{aligned}$$

Donde $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ según sea el intervalo en donde está t . La abreviación del cambio de signo del coseno no es la más natural, pero sí es muy conveniente. Se basa en que, en realidad, al movernos en los intervalos de t siempre nos estamos quedando con la primera porción de la función $\cos(2t)$, que es la que va desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$. De este modo trasladamos t al intervalo $[0, \pi/2]$ restando $n\pi/2$. Note que esta forma de presentar la solución evidencia una *escalada* en la integral. Esto se debe a que la función cuya integral calculamos es $|\sin(2t)|$, en cuya gráfica encontramos una sucesión periódica de *lomas* de ancho $\pi/2$ (todas las partes negativas de la función $\sin(2t)$ *suben*). Cada loma posee un área igual a $3/2$, por lo que al pasar de una loma a otra, se suma $3/2$ tantas veces como lomas sean completadas, y se integra solo la última loma, de forma exacta a como se integra la primera por tener la misma forma (esto se ve reflejado en que trasladamos todos los valores de t al intervalo $[0, \pi/2]$ dentro del coseno). La función $s(t)$ es entonces una función con *escalones* hechos de la porción $[0, \pi/2]$ de la función $\frac{3}{4}(1 - \cos(2t))$.

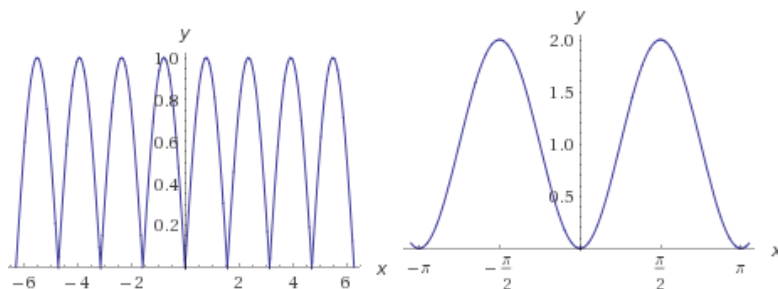
Podemos despejar t como:

$$\begin{aligned} s &= \frac{3n}{2} + \frac{3}{4} (1 - \cos(2t - n\pi)) \\ \frac{4s}{3} - 2n &= 1 - \cos(2t - n\pi) \\ \cos(2t - n\pi) &= 2n + 1 - \frac{4s}{3} \\ (2t - n\pi) \in [0, \pi] \Rightarrow 2t - n\pi &= \arccos \left(2n + 1 - \frac{4s}{3} \right) \\ t &= \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2} \arccos \left(2n + 1 - \frac{4s}{3} \right), \quad s \in \left[\frac{3n}{2}, \frac{3(n+1)}{2} \right] \end{aligned}$$

Recordando que $\vec{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t), 0)$, reemplazando t por la expresión recién calculada obtendremos la parametrización natural o parametrización en longitud de arco.

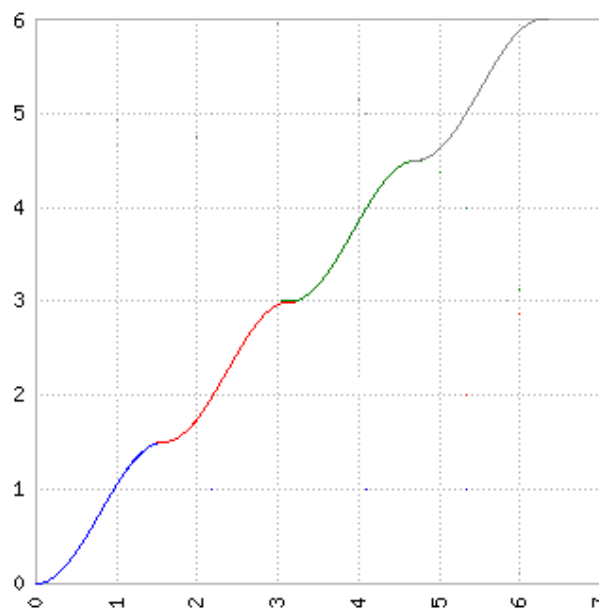
$$\sigma(s) = \left(\cos^3 \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2} \arccos \left(2n + 1 - \frac{4s}{3} \right) \right), \sin^3 \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2} \arccos \left(2n + 1 - \frac{4s}{3} \right) \right), 0 \right)$$

$$s \in \left[\frac{3n}{2}, \frac{3(n+1)}{2} \right], 0 \leq s \leq 6$$



(a) Función $|\sin(2t)|$

(b) Función $1 - \cos(2t)$



Función $s(t)$