

# SOLUCIÓN APUNTE MA1002

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### SEMANA 3

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas  
Use este material con responsabilidad.

**P1.** Tenemos que se cumple:

$$g(x) = xf(x) + 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad g(a+b) = g(a)g(b)$$

Luego vemos que:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)g(h) - g(x)}{h} \\ &= g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - 1}{h} = g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf(h)}{h} = g(x) \lim_{h \rightarrow 0} f(h) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

**P2.** Solo para abreviar, se define  $h(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ , definida en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Note que:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$$

Por lo que la afirmación  $f$  es derivable en 0 es equivalente a la existencia del límite anterior. Veamos primero que:

$$\begin{aligned} \frac{f(cx) - f(x)}{x} &= \frac{f(cx) - f(x) + f(0) - f(0)}{x} = c \frac{f(cx) - f(0)}{cx} - \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= ch(cx) - h(x) \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 0} ch(cx) - h(x) \end{aligned}$$

Si  $f$  es derivable en cero, entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = f'(0)$  existe. Además tomando  $u = cx$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(cx) = \lim_{u \rightarrow 0} h(u) = f'(0)$$

Luego por álgebra de límites,  $L$  existe y de hecho vale:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} ch(cx) - h(x) = c \lim_{x \rightarrow 0} h(cx) - \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = (c-1)f'(0)$$

El caso recíproco, es decir, si  $L$  existe entonces  $f'(0)$  existe, queda pendiente. Solo quiero hacer notar que la propiedad  $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$  solo es cierta si los límites de  $a_n$  y  $b_n$  existen, por lo que la separación de límites en  $L$  solo es posible si  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  existe. Evidentemente esto no se puede ocupar para probar justamente que  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  existe.

**P3.** Siguiendo la indicación, sea  $g(x) = e^{-ax}f(x)$ . La función  $g$  es derivable por álgebra de funciones derivables. En efecto,  $-ax$  es derivable y la función exponencial es derivable, por lo que la composición  $e^{-ax}$  también lo es. Además,  $f$  es derivable, por lo que el producto de ambas funciones también lo es. Derivando  $g$  obtenemos:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (e^{-ax})'f(x) + e^{-ax}f'(x) && \text{Derivada de un producto.} \\ &= -ae^{-ax}f(x) + e^{-ax}f'(x) && \text{Regla de la cadena.} \\ &= -ae^{-ax}f(x) + ae^{-ax}f(x) && \text{Ya que } f'(x) = af(x). \\ &= 0 \end{aligned}$$

Es decir,  $g$  es una función constante. Luego en particular podemos evaluar en cero para obtener que  $g(x) = g(0) = f(0)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Es decir:

$$e^{-ax}f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(x) = f(0)e^{ax}$$

**P4.** Primero observemos que  $G_n$  es efectivamente derivable puesto que es composición de funciones derivables. El hecho de que lo que se pide demostrar depende de  $n \in \mathbb{N}$  sugiere usar inducción. Demostremos entonces por inducción que:

$$G'_n(x) = \prod_{i=1}^n f'_i(f_{i+1}(\dots(f_n(x))\dots)), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

El caso  $n = 1$  es de fácil verificación. Supongamos que se cumple para un  $n$  arbitrario. Usando la regla de la cadena obtenemos:

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= G_n(f_{n+1}(x)) \\ G'_{n+1} &= G'_n(f_{n+1}(x)) \cdot f'_{n+1}(x) \\ &= f'_{n+1}(x) \prod_{i=1}^n f'_i(f_{i+1}(\dots(f_n(f_{n+1}(x)))\dots)) \end{aligned}$$

Pero  $f'_{n+1}(x)$  es justamente igual a  $f'_i(f_{i+1}(\dots(f_n(f_{n+1}(x)))\dots))$  cuando  $i = n + 1$ . Luego podemos hacer:

$$G'_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} f'_i(f_{i+1}(\dots(f_n(f_{n+1}(x)))\dots))$$

Con lo que se concluye la inducción. Luego la propiedad que se buscaba demostrar resulta ser cierta para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**P5.** Lo que se usará a continuación es la derivada de un producto y la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} f &= \cos(kg) \\ f' &= -kg' \sin(kg) \Rightarrow \frac{f'}{g'} = -k \sin(kg) \\ f'' &= (-kg' \sin(kg))' = -kg'' \sin(kg) - (kg')^2 \cos(kg) = g'' \frac{f'}{g'} - (kg')^2 f \\ \Rightarrow f'' - f' \frac{g''}{g'} + (kg')^2 f &= 0 \end{aligned}$$

**P6.** Recordemos en primer lugar que la derivada de  $f$  en  $x_0$  corresponde al límite:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Luego tendremos que:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 + \beta h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)) - (f(x_0 + \beta h) - f(x_0))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \alpha \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha h} - \beta \frac{f(x_0 + \beta h) - f(x_0)}{\beta h} \end{aligned}$$

Es inmediato ver que, haciendo un cambio de variable adecuado  $u = \alpha h$  y  $v = \beta h$ :

$$\begin{aligned} (i) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha h} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} = f'(x_0) \\ (ii) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \beta h) - f(x_0)}{\beta h} &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v} = f'(x_0) \end{aligned}$$

Por lo que tenemos finalmente por álgebra de límites:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 + \beta h)}{h} = \alpha f'(x_0) - \beta f'(x_0) = (\alpha - \beta) f'(x_0)$$

**P7.** Tenemos que se cumple:

$$|f(x) - f(y)| \leq a(x - y)^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  con  $x \neq y$ . Dividiendo por  $|x - y|$  la expresión anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| &\leq a|x - y| \\ -a|x - y| &\leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq a|x - y| \end{aligned}$$

Considerando el límite  $x \rightarrow y$ , vemos que ambos extremos de la desigualdad tienden a cero. Luego, en virtud del Teorema del Sandwich, el límite

$$\lim_{x \rightarrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(y)$$

Existe y vale cero  $\forall y \in \mathbb{R}$ .