

SOLUCIÓN APUNTE MA1002

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

SEMANA 5

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas
Use este material con responsabilidad.

P1.

a)

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{\sin(x) \cos(x)}{\sqrt{1 + \sin(x)}} dx \quad ; u = 1 + \sin(x) \rightarrow du = \cos(x) dx \\
 &= \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du = \int u^{\frac{1}{2}} - \int u^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{u}(u-3) + c \\
 &= \frac{2}{3} \sqrt{1 + \sin(x)}(\sin(x) - 2) + c \quad ; c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}} dx \quad ; u = 1 + \sqrt{x} \rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \rightarrow 2(u-1)du = dx \\
 &= \int \frac{2(u-1)^2}{\sqrt{u}} du = 2 \int \frac{u^2 - 2u + 1}{\sqrt{u}} du = 2 \int \left(u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}} \right) du \\
 &= \frac{4}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3} u^{\frac{3}{2}} + 4u^{\frac{1}{2}} + c = \frac{4}{15} \sqrt{u}(3u^2 - 5u + 1) + c \\
 &= \frac{4}{15} (3x + \sqrt{x} + 13) \sqrt{1 + \sqrt{x}} + c \quad ; c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2} + (\sqrt{1 + x^2})^3} dx \\
 &= \int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}} dx \quad ; u = 1 + \sqrt{1 + x^2} \rightarrow du = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} dx \\
 &= \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}} + c \quad ; c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

P2. Probablemente el enunciado debería decir :

$$f(x) = g'(x) + h'(x)g(x)$$

Dicho esto, veamos que la definición de primitiva nos dice que:

$$\int f(x)e^{h(x)}dx = e^{h(x)}g(x) + c \Leftrightarrow (e^{h(x)}g(x))' = f(x)e^{h(x)}$$

En efecto, el resultado es inmediato:

$$\begin{aligned} (e^{h(x)}g(x))' &= e^{h(x)}h'(x)g(x) + e^{h(x)}g'(x) \\ &= (h'(x)g(x) + g'(x))e^{h(x)} \\ &= f(x)e^{h(x)} \end{aligned}$$

P3.

$$\int g(x)dx = -\ln f(x) + c \Leftrightarrow (-\ln f(x))' = g(x) \quad [\text{Por definición}]$$

En efecto,

$$(-\ln f(x))' = -\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g(x)f(x)}{f(x)}$$

Y puesto que $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, se puede simplificar por $f(x)$ y se concluye el resultado.

P4. Como $f(x)$ es primitiva de $f'(x)$, $f'(x) = f(x)$ y luego $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$.

Se tiene entonces:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int dx = x + c$$

Por otro lado,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln |f(x)| + c = \ln f(x) + c$$

Lo último gracias a que $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, por propiedad de primitivas, solo difieren en una constante, es decir:

$$\ln f(x) - x = c \Leftrightarrow \ln f(x) = x + c \Leftrightarrow f(x) = e^{x+c}.$$