

SOLUCIÓN APUNTE MA1002

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

SEMANA 13

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas
Use este material con responsabilidad.

P1.

a) Notemos que:

$$\int_{1+}^2 \frac{dx}{x(\ln x)^2}; \quad u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} = \int_{0+}^{\ln(2)} \frac{du}{u^2}$$

$$\int_{1+}^2 \frac{dx}{(x-1)^2}; \quad u = x-1 \quad du = dx = \int_{0+}^1 \frac{du}{u^2}$$

Es decir, son integrales de segunda especie de la forma:

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}$$

Con $\alpha = 2 > 1$. Por lo tanto divergen.

b) En primer lugar tenemos que:

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}; \quad u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{\ln x} + c$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + c$$

Luego tenemos que $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$ tiene por primitiva:

$$\int f = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} + c$$

La integral pedida la separamos en:

$$\int_1^\infty f = \int_1^e f + \int_e^\infty f = \lim_{a \rightarrow 1+} \int_a^e f + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_e^b f$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty f &= \lim_{a \rightarrow 1+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \Big|_a^e + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \Big|_e^b \\ &= - \lim_{a \rightarrow 1+} \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{\ln a} \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b-1} - \frac{1}{\ln b} \right) \end{aligned}$$

Donde:

$$\lim_{a \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{\ln a} \right) = \lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{\ln(a) - a + 1}{(a-1)\ln(a)} \xrightarrow{L'H} \lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{a} - 1}{1 - \frac{1}{a} + \ln(a)} \xrightarrow{L'H} \lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{\frac{-1}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b-1} - \frac{1}{\ln b} \right) = 0$$

Así que finalmente tenemos:

$$\int_1^\infty f = - \lim_{a \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{\ln a} \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b-1} - \frac{1}{\ln b} \right) = \frac{1}{2}$$

Lo que prueba simultáneamente que la integral converge.

- c) Comparemos por cuociente con $\frac{1}{x^\beta}$, cuya integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}$ converge para $\beta < 1$ y diverge cuando $\beta \geq 1$. Así que resolvemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\beta}{x^{\alpha(1-x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\beta x^{\alpha x}}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\beta-\alpha} e^{\alpha x \ln(x)}$$

Pero tenemos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$. En efecto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

Así que si tomamos $\beta = \alpha$ el límite se vuelve:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\beta}{x^{\alpha(1-x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\beta-\alpha} e^{\alpha x \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\alpha x \ln(x)} = \exp \left(\alpha \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) \right) = 1$$

Por el teorema de comparación por cuociente, las integrales se comportan igual. Recordando que la integral de comparación converge para $\beta < 1$, $\alpha = \beta$ y que se pide $\alpha > 0$, se concluye que para $\alpha \in (0, 1)$ la integral converge.

P2.

- a) f es claramente continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ debido al álgebra de funciones continuas. Para la continuidad en $x = 0$ necesitamos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = k$$

Para ello calculamos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sinh(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x) - x}{x^2 \sinh(x)} \\ &\xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(x) - 1}{2x \sinh(x) + x^2 \cosh(x)} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{2 \sinh(x) + 4x \cosh(x) + x^2 \sinh(x)} \\ &\xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(x)}{6 \cosh(x) + 6x \sinh(x) + x^2 \cosh(x)} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Por lo que para $k = \frac{1}{6}$ la función f es continua en todo \mathbb{R} .

- b) Notemos que como f es continua en todo \mathbb{R} , la función es acotada en todos los intervalos cerrados $[a, b]$. Por lo tanto no posee integrales impropias de segunda especie. De aquí se extrae directamente la convergencia en $\int_0^1 f$. Para la integral hacia el infinito notemos que:

$$\int_1^\infty f = \int_1^\infty \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sinh(x)} \right) = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{x}{\sinh(x)} \right)$$

Pero

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sinh(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \frac{2}{1 - e^{-2x}} = 0$$

Por lo que lo que domina a la integral en el infinito es el término $\frac{1}{x^2}$. En efecto, comparando con la integral impropia $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{\sinh(x)} \right) = 1$$

Por lo que las integrales se comportan igual en virtud del teorema de comparación por cociente. Como $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ converge, se tiene que $\int_1^\infty f$ también.

Para $\int_0^\infty f$ basta notar que $\int_0^\infty f = \int_0^1 f + \int_1^\infty f$, y ya que las últimas dos integrales son convergentes, la integral en cuestión es convergente.

Para la última integral, es directo que $f(-x) = f(x)$, es decir, la función es par. Por lo tanto podemos hacer:

$$\int_{-\infty}^\infty f = 2 \int_0^\infty f$$

Por lo que converge. Otra forma más rigurosa de verlo es que:

$$\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^\infty f$$

Donde la última ya sabemos que converge. Para la otra veamos que:

$$\int_{-\infty}^0 f = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 f(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 f(-x)$$

Donde se usó la paridad de f . Haciendo el cambio $u = -x$, $du = -dx$ concluimos que:

$$\int_{-\infty}^0 f = \lim_{a \rightarrow \infty} - \int_a^0 f(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) = \int_0^\infty f$$

Que converge y se deduce lo mismo que antes.

P3. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$

a) Claramente su **dominio** es $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Además, por álgebra de funciones continuas, tenemos que f es **continua** en todo su dominio.

Sus **ceros** son (recordando que la exponencial siempre es estrictamente positiva):

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Límites importantes:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{u \rightarrow \infty} e^u (1 - u) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{u \rightarrow \infty} e^{-u} (1 + u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1 + u}{e^u} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{u \rightarrow 0} e^u (1 - u) = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, f posee una **asíntota vertical** en $x = 0$ (por lo que su discontinuidad no es reparable), en donde la función decrece sin cotas solo por la derecha. Además, la recta $y = 1$ es **asíntota horizontal** de f hacia ambos infinitos.

Para el crecimiento y la concavidad primero calculamos:

$$f'(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \quad f''(x) = -e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{3x+1}{x^5}\right)$$

Crecimiento: Es directo ver que $f'(x) > 0$ si $x > 0$ y $f'(x) < 0$ si $x < 0$. Se sigue que en $(-\infty, 0)$ la función es estrictamente decreciente y que en $(0, \infty)$ es estrictamente creciente.

Concavidad: Notando que:

$$\begin{aligned} (1 + 3x) &> 0 \quad \text{si} \quad x > -\frac{1}{3} \\ (1 + 3x) &< 0 \quad \text{si} \quad x < -\frac{1}{3} \\ x^5 &> 0 \quad \text{si} \quad x > 0 \\ x^5 &< 0 \quad \text{si} \quad x < 0 \end{aligned}$$

Se tiene por intervalos que $f''(x) < 0$ en $(-\infty, -\frac{1}{3})$, $f''(x) > 0$ en $(-\frac{1}{3}, 0)$ y $f''(x) < 0$ en $(0, \infty)$. Se sigue que en $(-\infty, -\frac{1}{3})$ y $(0, \infty)$ la función es cóncava y en $(-\frac{1}{3}, 0)$ es convexa. Además en $x_0 = -\frac{1}{3}$, $f''(x_0) = 0$, por lo que x_0 es punto de inflexión (cambio de concavidad).

Notemos para el **recorrido** que por la desigualdad fundamental para la exponencial se tiene:

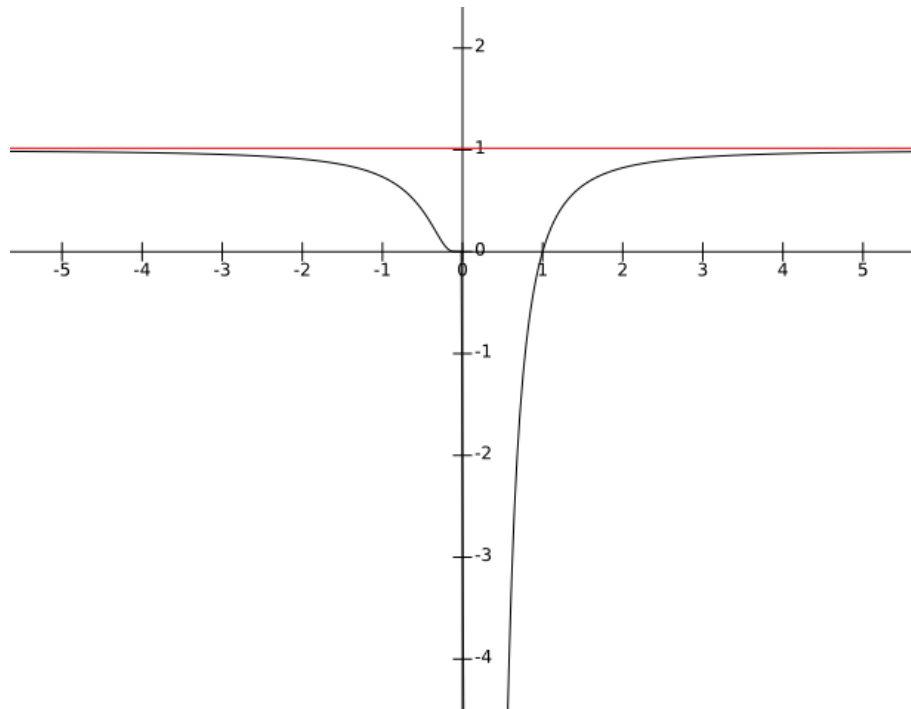
$$e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq 1$$

Donde la desigualdad fundamental se aplica solo si $\frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Pero es directo de la expresión $(1 - \frac{1}{x})$ que en $(0, 1]$ la función es no positiva, por lo que la última desigualdad se aplica para todo el dominio. Es decir:

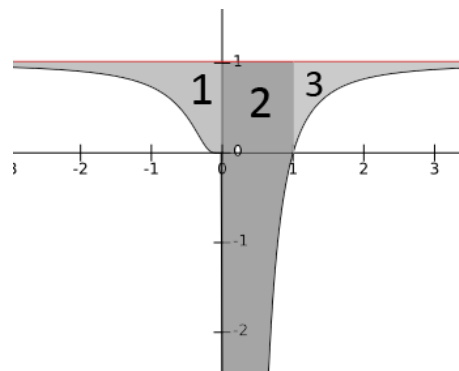
$$f(x) \leq 1, \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$$

Más aún, nunca se tiene que $f(x) = 1$, ya que ello solo es posible si $\frac{1}{x} = 0$, lo cual es imposible. Gracias a la continuidad de f en \mathbb{R}_+ podemos ver lo siguiente: cuando $x \rightarrow \infty$, $f(x) \rightarrow 1$ y cuando $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow -\infty$, por lo que en virtud del TVI, todos los valores entre $-\infty$ y 1 son tomados por la función. De todo lo anterior se concluye que $\text{Rec}(f) = (-\infty, 1)$.

Aquí un gráfico de la función:



b) Nos piden determinar:



$$R_1 = \int_{-\infty}^{0^-} (1 - f(x)) dx \quad R_2 = \int_{0^+}^1 (1 - f(x)) dx \quad R_3 = \int_1^{\infty} (1 - f(x)) dx$$

Antes de calcular, encontremos $\int(1 - f(x))$.

$$\begin{aligned}
 \int(1 - f(x))dx &= x - \int f(x)dx; \quad \begin{array}{l} u = f(x) \rightarrow du = f'(x)dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \\
 &= x - xf(x) + \int xf'(x)dx = x - xe^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \int \frac{x}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx \\
 &= x - e^{\frac{1}{x}} (x - 1) + \int \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}; \quad u = \frac{1}{x} \rightarrow du = -\frac{dx}{x^2} \\
 &= x - e^{\frac{1}{x}} (x - 1) - \int e^u du = x - e^{\frac{1}{x}} (x - 1) - e^u + c = x - e^{\frac{1}{x}} (x - 1) - e^{\frac{1}{x}} + c \\
 &= -x(e^{\frac{1}{x}} - 1) + c
 \end{aligned}$$

Será de utilidad por lo tanto analizar los siguientes límites de $x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1 \\
 \lim_{x \rightarrow 0^+} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u - 1}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} - \frac{1}{u} = +\infty \\
 \lim_{x \rightarrow 0^-} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{e^u - 1}{u} = 0
 \end{aligned}$$

Es directo entonces que como R_1 depende de $x \rightarrow -\infty$ y $x \rightarrow 0^-$ entonces converge; que como R_2 depende de $x \rightarrow 0^+$ entonces diverge; y que como R_3 depende de $x \rightarrow +\infty$ entonces converge. En efecto:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \int_{-\infty}^{0^-} (1 - f(x))dx = \int_{-\infty}^{-1} (1 - f(x))dx + \int_{-1}^{0^-} (1 - f(x))dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} (1 - f(x))dx + \lim_{b \rightarrow 0^-} \int_{-1}^b (1 - f(x))dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \Big|_{-1}^a + \lim_{b \rightarrow 0^-} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \Big|_b^{-1} \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} a(e^{\frac{1}{a}} - 1) - \lim_{b \rightarrow 0^-} b(e^{\frac{1}{b}} - 1) = 1 \\
 R_2 &= \int_{0^+}^1 (1 - f(x))dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 (1 - f(x))dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \Big|_1^a = +\infty \\
 R_3 &= \int_1^{\infty} (1 - f(x))dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b (1 - f(x))dx = \lim_{b \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \Big|_b^1 \\
 &= (e - 1) - \lim_{b \rightarrow \infty} b(e^{\frac{1}{b}} - 1) = e - 2
 \end{aligned}$$

P4.

a) Deseamos calcular:

$$\int_{-\infty}^{\ln(2)} \frac{1}{e^x + 4e^{-x}}$$

Notemos que la integral es continua en todos los reales, por lo que no forma integrales de segunda especie. Por lo tanto tenemos la integral impropia de primera especie dada por:

$$\int_{-\infty}^{\ln(2)} \frac{1}{e^x + 4e^{-x}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\ln(2)} \frac{1}{e^x + 4e^{-x}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\ln(2)} \frac{e^x}{e^{2x} + 4}$$

Tomando $u = e^x$, $du = e^x dx$ tenemos que:

$$\int_a^{\ln(2)} \frac{e^x}{e^{2x} + 4} = \int_{e^a}^2 \frac{du}{u^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{u}{2}\right) \Big|_{e^a}^2 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{e^a}{2}\right)$$

Puesto que $e^a \rightarrow 0$ cuando $a \rightarrow -\infty$, aprovechamos la continuidad de $\arctan(x)$ para obtener:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\ln(2)} \frac{e^x}{e^{2x} + 4} = \frac{\pi}{8} - \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{e^a}{2}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \arctan\left(\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{e^a}{2}\right) = \frac{\pi}{8}$$

Se concluye entonces el resultado: $\int_{-\infty}^{\ln(2)} \frac{1}{e^x + 4e^{-x}} = \frac{\pi}{8}$.

b) El denominador se anula en $x = 0$ y en $x = \pi$ para el intervalo de integración, por lo que separamos la integral a calcular como:

$$\int_0^{3\pi/2} \frac{x}{\sin(x)} = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin(x)} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x}{\sin(x)} + \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{x}{\sin(x)}$$

Notemos que la primera integral no conforma una integral impropia, puesto que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$ y por lo tanto la integral está bien definida por ser $\frac{x}{\sin(x)}$ continua en el intervalo. Para la segunda integral, hacemos una comparación con la integral impropia:

$$\int_{\pi/2}^{\pi^-} \frac{1}{(\pi - x)^\alpha}$$

Que converge para $\alpha < 1$ y diverge para $\alpha \geq 1$. Veamos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\frac{x}{\sin(x)}}{\frac{1}{(\pi-x)^\alpha}} &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(\pi-x)^\alpha x}{\sin(x)}, \quad u = \pi - x, \quad u \rightarrow 0^+ \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u^\alpha(\pi-u)}{\sin(\pi-u)}, \quad \sin(\pi-u) = \sin(\pi)\cos(u) - \sin(u)\cos(\pi) = \sin(u) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u^\alpha(\pi-u)}{\sin(u)}, \quad \text{tomando } \alpha = 1 \text{ se tiene un límite conocido} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u}{\sin(u)}(\pi-u) = \pi \end{aligned}$$

Por el criterio de comparación, las integrales se comportan igual. Pero como $\alpha = 1$, la integral de comparación resulta ser divergente, y se concluye entonces que la integral en cuestión también diverge.

Puesto que una de las integrales de la descomposición de la integral pedida es divergente, la integral original $\int_0^{3\pi/2} \frac{x}{\sin(x)}$ también es divergente.

c) En primer lugar veamos que para $x \in (0, 1]$ la función $f(x) = |\ln(x)|$ cumple con:

$$f'(x) = (|\ln(x)|)' = (-\ln(x))' = \frac{-1}{x} \Rightarrow (f'(x))^2 = \frac{1}{x^2}$$

. La integrales a analizar son (con indefinición de f en $x = 0$):

$$\begin{aligned} A_{OX} &= 2\pi \int_0^1 f \sqrt{1 + (f')^2} = -2\pi \int_{0^+}^1 \ln(x) \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx \\ A_{OY} &= 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + (f')^2} = 2\pi \int_{0^+}^1 x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx \end{aligned}$$

La integral A_{OY} es trivialmente convergente puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{\frac{1 + x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + x^2} = 1$$

Es decir, la función es continua en el intervalo de integración de forma acotada, y por lo tanto no produce una integral impropia de segunda especie.

Para la integral A_{OX} , notemos que para $x \in (0, 1]$ se cumple (recordemos que el criterio de comparación es para funciones no negativas):

$$-\ln(x) \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\ln(1/x)}{x} \sqrt{1 + x^2} \geq \frac{\ln(1/x)}{x} = -\frac{\ln(x)}{x} \geq 0$$

Pero la integral de comparación resulta ser divergente. En efecto:

$$\begin{aligned} &\int_{0^+}^1 \frac{-\ln(x)}{x} dx, \quad u = -\ln(x), \quad du = -\frac{dx}{x} \\ &= -\int_{+\infty}^0 u du = \int_0^{+\infty} u du \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, A_{OX} diverge.