

# **SOLUCIONES AL APUNTE MA1002-2013 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas

Las soluciones que hice mientras era estudiante del curso fueron revisadas y digitalizadas en el transcurso de un año, resultando en este documento. A pesar de ello, existen algunos problemas que quedaron sin resolver.

El presente documento no pretende mostrar una solución única a los problemas del apunte del curso, puesto que, por lo general, los problemas pueden ser atacados de forma diversa. Espero que se use este material con responsabilidad, a modo de una herramienta de apoyo al estudio, y no como un sustituto de este.

Espero que este trabajo sea útil a los futuros estudiantes y sea compartido entre ellos.

El autor.

## Índice

Semana 1 . . . . .	3
Semana 2 . . . . .	8
Semana 3 . . . . .	13
Semana 4 . . . . .	16
Semana 5 . . . . .	27
Semana 6 . . . . .	29
Semana 7 . . . . .	37
Semana 8 . . . . .	42
Semana 9 . . . . .	51
Semana 10 . . . . .	60
Semana 11 . . . . .	64
Semana 12 . . . . .	69
Semana 13 . . . . .	77
Semana 14 . . . . .	85
Semana 15 . . . . .	95

**SOLUCIÓN APUNTE MA1002**  
**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**  
**SEMANA 1**

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas  
Use este material con responsabilidad.

**P1.** Sean  $a_n$  y  $b_n$  dos sucesiones que convergen a  $c$  tales que

$$a_n < c < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Además, por el enunciado sabemos que se cumple

$$f(a_n) < 0 \wedge f(b_n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por la continuidad de  $f$  en  $\mathbb{R}$  tenemos que  $f(a_n) \rightarrow f(c)$  y  $f(b_n) \rightarrow f(c)$ , por lo que tomando el límite a las desigualdades anteriores tenemos por propiedad de límites que:

$$f(c) \leq 0 \wedge f(c) \geq 0$$

De donde se implica que  $f(c) = 0$ .

**P2.** Sea  $x_0 \in A$ . Por enunciado sabemos que:

$$\forall x \in A, \exists L \geq 0, |f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|$$

**Caso  $L = 0$ :** En este caso se tiene que  $|f(x) - f(x_0)| \leq 0, \forall x \in A$ , lo cual implica que

$$f(x) = f(x_0), \forall x \in A$$

Luego la función es constante y trivialmente continua en todo  $A$ .

**Caso  $L > 0$ :** Sea  $\varepsilon > 0$ . Notemos que si pedimos que  $x$  esté lo suficientemente cerca de  $x_0$ , es decir, que  $|x - x_0| \leq \delta$  para algún  $\delta > 0$ , entonces tendremos que:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| \leq L\delta$$

Por lo que eligiendo  $\delta = \varepsilon/L$  tendremos que  $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ . Dada la arbitrariedad de  $\varepsilon$ , hemos probado que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Es decir,  $f$  es continua en  $A$ .

**P3.** Veamos primero la implicancia hacia la derecha. Sea entonces  $f$  continua en  $x_0$ . Tenemos entonces que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Como  $\varepsilon$  es una cota superior del conjunto  $\{|f(x) - f(x_0)| : |x - x_0| \leq \delta\}$ , es inmediato tener entonces que,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tal que

$$\sup_{x \in A} \{|f(x) - f(x_0)| : |x - x_0| \leq \delta\} \leq \varepsilon$$

Además, puesto que  $r_n \rightarrow 0$ , para  $\delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $\forall n \geq n_0, r_n \leq \delta$  (esto último puesto que  $|r_n| = r_n$ ). Notemos que  $|x - x_0| \leq r_n \Rightarrow |x - x_0| \leq \delta, \forall n \geq n_0$ . Debido a esto es también cierto que  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$ ,

$$s_n := \sup_{x \in A} \{|f(x) - f(x_0)| : |x - x_0| \leq r_n\} \leq \varepsilon$$

Es decir,  $s_n \rightarrow 0$ .

Para la implicancia hacia la izquierda, tomemos como cierto que

$$s_n := \sup_{x \in A} \{|f(x) - f(x_0)| : |x - x_0| \leq r_n\} \rightarrow 0$$

Notemos que es inmediato ver que

$$|x - x_0| \leq r_n \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq s_n$$

Como ambos valores absolutos son mayorados por una sucesión nula, son también sucesiones nulas. Esto, por propiedad de las sucesiones, significa que:

$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) \rightarrow f(x_0)$$

Es decir,  $f$  es continua en  $x_0$ .

**P4.** Para la discontinuidad en  $\mathbb{Q}$ , basta tomar  $x_0 \in \mathbb{Q}$  y una sucesión  $x_n \rightarrow x_0$  tal que  $x_n \notin \mathbb{Q}$ . Esta sucesión está bien definida debido a que la densidad de los irracionales nos permite acercarnos indefinidamente a cualquier número real. A partir de esto, vemos que  $x_n \rightarrow x_0$  y  $f(x_n) = 0 \rightarrow 0$ . Sin embargo  $f(x_0) = 1/q \neq 0$ , por lo que  $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$  y  $f$  es discontinua en  $x_0 \in \mathbb{Q}$ . Para la continuidad en  $x_0 \notin \mathbb{Q}$ , buscamos demostrar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon \quad (1)$$

Sea entonces  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Lo que sigue será un intento por encontrar un  $\delta$  lo suficientemente pequeño como para que los valores de  $|f(x)|$  no puedan superar a  $\varepsilon$ . Nos despreocuparemos de los  $x \notin \mathbb{Q}$  por ahora puesto que en este caso  $f(x) = 0$ , trivialmente menores a  $\varepsilon$ . Notemos entonces que para acotar a las imágenes de los racionales necesitamos que se cumpla:

$$|f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow 1/|q| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |q| \geq 1/\varepsilon$$

Es decir, que la magnitud de los denominadores debe ser superior a  $1/\varepsilon$ . Basta con buscar que el denominador tenga una magnitud mínima de  $\lambda = [1/\varepsilon] + 1$ .

Definimos ahora:

$$A_i = \left\{ x \in \mathbb{Q} : |f(x)| = \frac{1}{i} \right\} \quad d_i = \min\{|x - x_0| : x \in A_i\}$$

Note en primer lugar (y esto es importante), que  $d_i > 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ , puesto que, al ser  $x$  racional y  $x_0$  irracional, nunca se tendrá una distancia nula. A modo de explicación, note que si tomamos  $0 < \delta < d_1$ , entonces al imponer  $|x - x_0| \leq \delta$  jamás se tendrá que  $|f(x)| = 1$ , puesto que aquellos  $x$  que tienen esa imagen están demasiado lejos. En forma general, si tomamos  $0 < \delta < d_i$ , entonces al imponer  $|x - x_0| \leq \delta$  jamás se tendrá que  $|f(x)| = 1/i$ . Luego es directo tomar

$$0 < \delta_0 < \min\{d_i\}_{i=1}^\lambda$$

Con lo que si imponemos  $|x - x_0| \leq \delta_0$ , jamás se tendrá que  $f(x) \in \{1/i\}_{i=1}^\lambda$ . En definitiva, tenemos que:

$$\forall x \in \mathbb{Q}, |x - x_0| \leq \delta_0 \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{[1/\varepsilon] + 1} \leq \varepsilon$$

Y como para  $x \notin \mathbb{Q}$ ,  $f(x) = 0$ , la afirmación anterior se generaliza para todo  $\mathbb{R}$ . Luego tomando  $\delta = \delta_0$ , la afirmación (1) es verdadera y  $f$  es continua en  $x_0 \notin \mathbb{Q}$ .

**P5.** Utilizando la indicación, sea  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $x_0 \in \mathbb{R}$ , tal que  $h(x_0) > 0$ . La continuidad en  $x_0$  nos dice que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), h(x_0) - \varepsilon \leq h(x) \leq h(x_0) + \varepsilon$$

Como nos interesa que  $h(x) > 0$ , basta hacer que  $h(x_0) - \varepsilon > 0$ . Recordando que  $h(x_0) > 0$ , podemos elegir  $\varepsilon = h(x_0)/2 > 0$  para obtener que existe  $\delta > 0$ , tal que  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  se cumple

$$h(x) \geq h(x_0) - \varepsilon = h(x_0) - \frac{h(x_0)}{2} = \frac{h(x_0)}{2} > 0 \Rightarrow h(x) > 0$$

Por lo que tomando  $\epsilon = \delta$  tenemos lo pedido. Para demostrar el problema original, basta considerar la función  $h(x) = f(x) - g(x)$  claramente continua por ser suma de funciones continuas, y en donde se verifica que  $h(x_0) > 0$ . Gracias a lo demostrado anteriormente, tenemos que existe  $\epsilon$  tal que

$$h(x) = f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x) \quad \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$$

**P6.**

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Haremos una demostración que comenzará por el conjunto de los números naturales. A partir de este resultado se generalizará la propiedad hasta los números reales.

(a1) Antes de continuar será conveniente ver que:

$$f(x) = f(x + 0) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Probaremos en primer lugar que  $f(nx) = nf(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Fijemos  $x \in \mathbb{R}$  y procedamos por inducción.

Los casos  $n = 0$  y  $n = 1$  son triviales. Supongamos que se cumple para cierto  $n \in \mathbb{N}$ . Tenemos entonces que:

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

Por lo que la propiedad es cierta  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Gracias a la arbitrariedad de  $x$ , también es cierta  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Para extender el resultado a  $n \in \mathbb{Z}$ , notemos que solo falta demostrar la veracidad de la proposición para los negativos. Luego sea  $n \in \mathbb{Z}^-$  y, advirtiendo que  $(-n) \in \mathbb{N}$ , tenemos que:

$$0 = f(0) = f(nx - nx) = f(nx) + f(-nx) = f(nx) - nf(x) \Rightarrow f(nx) = nf(x)$$

Por lo tanto,  $f(nx) = nf(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

Sea ahora  $x \in \mathbb{Q}$ . Sabemos que  $x = p/q$ , con  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \neq 0$ . Luego podemos hacer:

$$\left. \begin{aligned} f(p) &= f(q \cdot \frac{p}{q}) = qf(\frac{p}{q}) \\ f(p) &= f(p \cdot 1) = pf(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow qf\left(\frac{p}{q}\right) = pf(1) \Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1) \Rightarrow f(x) = ax$$

Donde se definió  $a = f(1)$ . Sea ahora  $x \in \mathbb{R}$  y una sucesión  $x_n \rightarrow x$  tal que  $x_n \in \mathbb{Q}$ , que está bien definida debido a la densidad de los racionales en  $\mathbb{R}$ . Por la propiedad recién vista tenemos que  $f(x_n) = ax_n \rightarrow ax$ . Pero por la continuidad de  $f$  tenemos también que  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . Debido a la unicidad del límite, debe cumplirse que  $f(x) = ax$ , con lo que se demuestra lo pedido.

(a2) La mecánica es la misma. Veamos que:

$$f(x) = f(x + 0) = f(x)f(0) \Rightarrow f(0) = 1$$

Probemos que  $f(nx) = f(x)^n$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Fijemos  $x \in \mathbb{R}$  y procedamos por inducción.

Los casos  $n = 0$  y  $n = 1$  son triviales. Supongamos que se cumple para cierto  $n \in \mathbb{N}$ . Tenemos entonces que:

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx)f(x) = f(x)^n f(x) = f(x)^{n+1}$$

Por lo que la propiedad es cierta. Sea  $n \in \mathbb{Z}^-$ . Luego:

$$1 = f(0) = f(nx - nx) = f(nx)f(-nx) = f(nx)f(x)^{-n} \Rightarrow f(nx) = f(x)^n$$

Por lo tanto, se generaliza que  $f(nx) = f(x)^n$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

Sea ahora  $x \in \mathbb{Q}$ . Como  $x = p/q$ , con  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \neq 0$ , podemos hacer:

$$\left. \begin{aligned} f(p) &= f(q \cdot \frac{p}{q}) = f(\frac{p}{q})^q \\ f(p) &= f(p \cdot 1) = f(1)^p \end{aligned} \right\} \Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right)^q = f(1)^p \Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = f(1)^{\frac{p}{q}} \Rightarrow f(x) = a^x$$

Donde se definió  $a = f(1)$ . Sea ahora  $x \in \mathbb{R}$  y una sucesión  $x_n \rightarrow x$  tal que  $x_n \in \mathbb{Q}$ . Tenemos que  $f(x_n) = a^{x_n} \rightarrow a^x$ . Pero por la continuidad de  $f$  tenemos también que  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . Debido a la unicidad del límite, debe cumplirse que  $f(x) = a^x$ , con lo que se demuestra lo pedido.

- b)  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f(xy) = f(x) + f(y)$ ,  $\forall x, y \in (0, \infty)$ . Note que la función  $\log_a(x)$  es la inversa de  $a^x$  cuando  $x \in (0, \infty)$ . Intentaremos demostrar el resultado usando lo demostrado en (a2) a través de  $f^{-1}(x)$ . Si probamos que  $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x)f^{-1}(y)$ , entonces es directo usar (a2). Note que, como  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ . Luego, como  $f^{-1}(x)$  y  $f^{-1}(y)$  están en  $(0, \infty)$ , tendremos por propiedad de la función  $f$  que se cumple:

$$f(f^{-1}(x)f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)) = x + y$$

De donde aplicando  $f^{-1}$  a ambos lados obtenemos:

$$f^{-1}(x)f^{-1}(y) = f^{-1}(x+y)$$

Gracias a lo visto en (a2), tenemos que:

$$f^{-1}(y) = a^y \quad \text{con } a = f^{-1}(1), \quad y \in \mathbb{R}$$

Y si ocupamos  $y = f(x)$ , tenemos que:

$$f^{-1}(f(x)) = a^{f(x)} \Leftrightarrow x = a^{f(x)} \Leftrightarrow \log_a(x) = f(x)$$

Que era lo que se quería demostrar.

# SOLUCIÓN APUNTE MA1002

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### SEMANA 2

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas  
Use este material con responsabilidad.

**P1.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$ .

- a) Puesto que  $f$  es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , por el teorema de Weierstrass  $f$  alcanza su mínimo y su máximo. Sean entonces  $m, M \in [a, b]$  valores del dominio en que  $f$  toma su mínimo y su máximo valor respectivamente. Esto es:

$$f(m) \leq f(x) \leq f(M), \quad \forall x \in [a, b]$$

Sean ahora  $x_1, x_2 \in [a, b]$  arbitrarios. Sabemos que se cumple:

$$(1) \quad f(m) \leq f(x_1) \leq f(M)$$

$$(2) \quad f(m) \leq f(x_2) \leq f(M)$$

Por lo que sumando (1) con (2) obtenemos:

$$2f(m) \leq f(x_1) + f(x_2) \leq 2f(M) \Leftrightarrow f(m) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(M)$$

Y puesto que  $x_1$  y  $x_2$  son arbitrarios, lo anterior es válido  $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ . Luego simplemente tomando  $\underline{x} = m$  y  $\bar{x} = M$  se tiene lo pedido.

- b) Sean  $x_1, x_2 \in [a, b]$  cualquiera. Puesto que  $f$  es continua en  $[a, b]$  y  $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$  se encuentra comprendido entre dos imágenes de la función (gracias a lo visto en la parte anterior), por el TVI se concluye que existe  $\beta \in [a, b]$  tal que:

$$f(\beta) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

**P2.** En lugar de demostrar que  $f(\bar{x}) = f(\bar{x} + a)$ , demostraremos que  $f(\bar{x}) - f(\bar{x} + a) = 0$ , puesto que es una forma típica de aplicar el TVI en la forma particular del teorema 1.6 del apunte. Sea entonces la función  $g : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = f(x) - f(x + a)$ . Esta función es claramente continua por álgebra de funciones continuas. Además vemos que:

$$(1) \quad g(0) = f(0) - f(a)$$

$$(2) \quad g(a) = f(a) - f(2a) = f(a) - f(0)$$

Lo último gracias a que  $f(2a) = f(0)$ . Vemos entonces que se tiene

$$g(0)g(a) = -(f(0) - f(a))^2 \leq 0$$

Y por el TVI se tiene que existe  $\bar{x} \in [0, a]$  tal que

$$g(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{x} + a)$$

**P3.**

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- a) La continuidad de  $\tanh(x)$  es consecuencia directa del álgebra de funciones continuas. La función exponencial es continua en todo  $\mathbb{R}$ , la función  $-x$  es también continua en todo  $\mathbb{R}$ , por lo que la composición  $e^{-x}$  también lo es. Luego  $e^x - e^{-x}$  y  $e^x + e^{-x}$  son continuas en todo  $\mathbb{R}$ , y puesto que  $e^x + e^{-x}$  jamás se anula, se concluye que su cociente también lo es.

Evalutando en  $x = 0$  se obtiene:

$$\tanh(0) = \frac{e^0 - e^0}{e^0 + e^0} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

Finalmente, puesto que sabemos que la función exponencial siempre es positiva, se cumple para todos los reales que:

$$(1) \quad -e^x < e^x$$

$$(2) \quad -e^{-x} < e^{-x}$$

Restando  $e^{-x}$  en (1) se obtiene:

$$-e^x - e^{-x} < e^x - e^{-x} \Leftrightarrow -(e^x + e^{-x}) < e^x - e^{-x} \Leftrightarrow -1 < \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Sumando  $e^x$  en (2) se obtiene:

$$e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x} \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1$$

Juntando ambas desigualdades obtenemos

$$\begin{aligned} -1 &< \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1 \\ \Leftrightarrow -1 &< \tanh(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b)

$$\tanh(n) = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$$

$$(1) \text{ Simplificando por } e^n: \tanh(n) = \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}}$$

$$(2) \text{ Simplificando por } e^{-n}: \tanh(n) = \frac{e^{2n} - 1}{e^{2n} + 1}$$

Recordemos que  $e^{-n} \rightarrow 0$ , por lo que usando (1) obtenemos:

$$\tanh(n) = \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} \rightarrow \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

Y usando (2) obtenemos:

$$\tanh(-n) = \frac{e^{-2n} - 1}{e^{-2n} + 1} \rightarrow \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

c) Notemos en primer lugar que  $\tanh(n) \rightarrow 1$  y  $\tanh(-n) \rightarrow -1$  significan que:

$$(i) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n'_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n'_0, 1 - \varepsilon \leq \tanh(n) \leq 1 + \varepsilon$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n''_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n''_0, -1 - \varepsilon \leq \tanh(-n) \leq -1 + \varepsilon$$

Sea ahora  $y \in (-1, 1)$  arbitrario. Debido a la densidad en  $\mathbb{R}$ , existen  $a, b \in \mathbb{R}$  positivos tales que

$$-1 < -1 + a < y < 1 - b < 1$$

Para  $b$ , según (i),  $\exists n'_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $1 - b < \tanh(n)$  para todo  $n \geq n'_0$ . Por otro lado, para  $a$ , según (ii),  $\exists n''_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\tanh(-n) < -1 + a$  para todo  $n \geq n''_0$ . Luego, para  $n_0 = \max\{n'_0, n''_0\}$  se cumple para todo  $n \geq n_0$  que:

$$\tanh(-n) < -1 + a < y < 1 - b < \tanh(n)$$

Tomando simplemente  $n = n_0$  llegamos a que  $\tanh(-n_0) < y < \tanh(n_0)$ . Puesto que  $y$  está comprendido entre dos imágenes de una función continua, podemos usar el TVI para concluir que existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\tanh(x) = y$ . Dada la arbitrariedad de  $y$ , el resultado es válido para todo  $y \in (-1, 1)$ .

d) Sea  $h(x) = \tanh(x) - \cos(x)$  una función continua por álgebra de funciones continuas. Demostraremos que  $h(x)$  tiene infinitos ceros. La idea es la siguiente: la función  $\tanh(x)$  siempre está entre 1 y  $(-1)$  sin tomar estos dos valores, y la función  $\cos(x)$  toma ambos valores de forma periódica, de modo que la función  $h(x)$  constantemente cambia de signo, ya que estamos seguros de que cuando el coseno vale 1 es mayor que  $\tanh(x)$ , y es menor cuando vale  $(-1)$ . Buscaremos entonces esos cambios de signo.

Note que en los intervalos de la forma  $[k\pi, (k+1)\pi]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  siempre ocurre que:

$$(\cos(k\pi) = 1 \wedge \cos((k+1)\pi) = -1) \vee (\cos(k\pi) = -1 \wedge \cos((k+1)\pi) = 1)$$

Y ya que siempre se cumple que  $-1 < \tanh(x) < 1$ , se tendrá que:

$$(h(k\pi) < 0 \wedge h((k+1)\pi) > 0) \vee (h(k\pi) > 0 \wedge h((k+1)\pi) < 0)$$

En ambos casos se tendrá que  $h(k\pi)h((k+1)\pi) \leq 0$ , y usando la continuidad de  $h(x)$  con el TVI concluimos que existe  $x_0 \in [k\pi, (k+1)\pi]$  tal que:

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \tanh(x_0) = \cos(x_0)$$

Es decir,  $x_0$  es solución de la ecuación del problema, y puesto que existen infinitos intervalos  $[k\pi, (k+1)\pi]$  distintos entre sí, se tendrá la existencia de infinitas soluciones.

**P4.** Intentaremos definir una función conveniente para este problema de modo que sus ceros sean precisamente los instantes de ambos días en que el monje se encuentra a la misma distancia del monasterio.

Sea la función  $subida(t)$  que indica la distancia al monasterio a la hora  $t$  del día 7. De forma análoga se define la función  $bajada(t)$  que indica la distancia al monasterio a la hora  $t$  del día 8. Supongamos que la cumbre de la montaña está a una distancia  $L$  y note que el monje al inicio del día 7 se encuentra en el monasterio al igual que al final del día 8. Además, el monje al final del día 7 se encuentra en la cumbre al igual que en el inicio del día 8. Esto lo traducimos como:

$$subida(0) = bajada(24) = 0 \quad subida(24) = bajada(0) = L$$

Definimos la función  $h(t) = subida(t) - bajada(t)$ ,  $t \in [0, 24]$ , cuyos ceros nos indican precisamente los instantes de coincidencia que buscamos. Evaluando en los extremos del intervalo vemos que:

$$\left. \begin{array}{l} h(0) = 0 - L = -L \\ h(24) = L - 0 = L \end{array} \right\} \Rightarrow h(0)h(24) = -L^2 \leq 0$$

Suponiendo que las funciones de subida y bajada son continuas (es decir, que el monje no se teletransporta o algo por el estilo), podemos usar el TVI para concluir que existe  $t_0 \in [0, 24]$  tal que

$$h(t_0) = 0 \Leftrightarrow subida(t_0) = bajada(t_0)$$

Es decir, a la misma hora en el día 7 y el día 8 el monje se halla a la misma distancia del monasterio.

**P5.** Al camino recorrido por el conductor lo dotamos de la función  $d : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  que entrega su posición en el camino en función del tiempo (medido en horas). Supondremos que esta función es continua, lo cual es razonable dada la forma de moverse de un auto. Sea ahora la función  $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(t) = d(t+1) - d(t)$ , es decir, la distancia recorrida en lapsos de exactamente una hora. Note que la distancia total recorrida está dada por

$$D = d(5) - d(0) = \sum_{k=0}^4 d(k+1) - d(k) = \sum_{k=0}^4 f(k)$$

En donde se debe cumplir necesariamente que  $D = 500$ .

Buscamos  $t_0 \in [0, 4]$  tal que  $f(t_0) = 100$ . Supongamos que  $f(t) > 100$ ,  $\forall t$ . En particular se tendría que:

$$D = \sum_{k=0}^4 f(k) > 500$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $\exists t \in [0, 4]$  tal que  $f(t) \leq 100$ . De forma análoga supongamos que  $f(t) < 100$ ,  $\forall t$ . En particular se tendría que:

$$D = \sum_{k=0}^4 f(k) < 500$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $\exists t \in [0, 4]$  tal que  $f(t) \geq 100$ . En definitiva, existen  $t_1$  y  $t_2$  no necesariamente diferentes tales que:

$$f(t_1) \leq 100 \leq f(t_2)$$

Gracias al TVI existe  $t_0$  entre  $t_1$  y  $t_2$  tal que  $f(t_0) = 100$ , que era lo que queríamos demostrar.

**P6.** Creo que el enunciado debería decir  $g(x) = -(b-x)^n$ . De otro modo se llegan a contradicciones. Asumiendo esto continuamos.

Se tienen  $f$  y  $g$  continuas en  $[a, b]$  con  $f(a) \neq f(b)$ ,  $f(a) = -g(b)$  y  $f(b) = -g(a)$ . Buscaremos un cero para la función  $h(x) = f(x) + g(x)$  continua por álgebra de funciones continuas. Evaluando en los extremos del intervalo obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} h(a) = f(a) + g(a) = f(a) - f(b) \\ h(b) = f(b) + g(b) = f(b) - f(a) \end{array} \right\} \Rightarrow h(a)h(b) = -(f(a) - f(b))^2 \leq 0$$

Luego, por el TVI  $\exists x_0 \in [a, b]$  tal que

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = -g(x_0)$$

Para el caso particular de  $f(x) = (x-a)^n$  y  $g(x) = -(b-x)^n$ , se verifican rápidamente las hipótesis:

$$\begin{array}{ll} f(a) = 0 & -g(b) = 0 \\ f(b) = (b-a)^n & -g(a) = (b-a)^n \end{array}$$

Por lo que  $f(a) = -g(b)$  y  $f(b) = -g(a)$ . Además,  $a < b \Rightarrow (b-a)^n \neq 0 \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ . Luego tenemos que  $\exists x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) = -g(x_0)$ . Recordando que:

$$x \in [a, b] \Rightarrow (x-a) \geq 0 \wedge (b-x) \geq 0$$

Podemos calcular  $x_0$  simplemente sacando raíz  $n$ -ésima, puesto que las bases siempre son no-negativas:

$$\begin{array}{rcl} (x_0 - a)^n & = & (b - x_0)^n \\ x_0 - a & = & b - x_0 \\ x_0 & = & \frac{a+b}{2} \end{array}$$

**P7.** Es idéntica a la P5 de la Semana 1.

**P8.** Se tiene  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  continua. Sea la función  $g(x) = f(x) - x$ . Recordemos que, como  $f(x) \in [a, b]$ , se debe cumplir  $a \leq f(x) \leq b$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Evaluando  $g$  en los extremos del intervalo obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} g(a) = f(a) - a \geq 0 \\ g(b) = f(b) - b \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(a)g(b) \leq 0$$

Puesto que la función  $g$  es continua por álgebra de funciones continuas, se puede utilizar el TVI para concluir que existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$$

# SOLUCIÓN APUNTE MA1002

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### SEMANA 3

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas  
Use este material con responsabilidad.

**P1.** Tenemos que se cumple:

$$g(x) = xf(x) + 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad g(a+b) = g(a)g(b)$$

Luego vemos que:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)g(h) - g(x)}{h} \\ &= g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - 1}{h} = g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf(h)}{h} = g(x) \lim_{h \rightarrow 0} f(h) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

**P2.** Solo para abreviar, se define  $h(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ , definida en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Note que:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$$

Por lo que la afirmación  $f$  es derivable en 0 es equivalente a la existencia del límite anterior. Veamos primero que:

$$\begin{aligned} \frac{f(cx) - f(x)}{x} &= \frac{f(cx) - f(x) + f(0) - f(0)}{x} = c \frac{f(cx) - f(0)}{cx} - \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= ch(cx) - h(x) \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 0} ch(cx) - h(x) \end{aligned}$$

Si  $f$  es derivable en cero, entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = f'(0)$  existe. Además tomando  $u = cx$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(cx) = \lim_{u \rightarrow 0} h(u) = f'(0)$$

Luego por álgebra de límites,  $L$  existe y de hecho vale:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} ch(cx) - h(x) = c \lim_{x \rightarrow 0} h(cx) - \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = (c-1)f'(0)$$

El caso recíproco, es decir, si  $L$  existe entonces  $f'(0)$  existe, queda pendiente. Solo quiero hacer notar que la propiedad  $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$  solo es cierta si los límites de  $a_n$  y  $b_n$  existen, por lo que la separación de límites en  $L$  solo es posible si  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  existe. Evidentemente esto no se puede ocupar para probar justamente que  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  existe.

**P3.** Siguiendo la indicación, sea  $g(x) = e^{-ax}f(x)$ . La función  $g$  es derivable por álgebra de funciones derivables. En efecto,  $-ax$  es derivable y la función exponencial es derivable, por lo que la composición  $e^{-ax}$  también lo es. Además,  $f$  es derivable, por lo que el producto de ambas funciones también lo es. Derivando  $g$  obtenemos:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (e^{-ax})'f(x) + e^{-ax}f'(x) && \text{Derivada de un producto.} \\ &= -ae^{-ax}f(x) + e^{-ax}f'(x) && \text{Regla de la cadena.} \\ &= -ae^{-ax}f(x) + ae^{-ax}f(x) && \text{Ya que } f'(x) = af(x). \\ &= 0 \end{aligned}$$

Es decir,  $g$  es una función constante. Luego en particular podemos evaluar en cero para obtener que  $g(x) = g(0) = f(0)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Es decir:

$$e^{-ax}f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(x) = f(0)e^{ax}$$

**P4.** Primero observemos que  $G_n$  es efectivamente derivable puesto que es composición de funciones derivables. El hecho de que lo que se pide demostrar depende de  $n \in \mathbb{N}$  sugiere usar inducción. Demostremos entonces por inducción que:

$$G'_n(x) = \prod_{i=1}^n f'_i(f_{i+1}(\dots(f_n(x))\dots)), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

El caso  $n = 1$  es de fácil verificación. Supongamos que se cumple para un  $n$  arbitrario. Usando la regla de la cadena obtenemos:

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= G_n(f_{n+1}(x)) \\ G'_{n+1} &= G'_n(f_{n+1}(x)) \cdot f'_{n+1}(x) \\ &= f'_{n+1}(x) \prod_{i=1}^n f'_i(f_{i+1}(\dots(f_n(f_{n+1}(x)))\dots)) \end{aligned}$$

Pero  $f'_{n+1}(x)$  es justamente igual a  $f'_i(f_{i+1}(\dots(f_n(f_{n+1}(x)))\dots))$  cuando  $i = n + 1$ . Luego podemos hacer:

$$G'_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} f'_i(f_{i+1}(\dots(f_n(f_{n+1}(x)))\dots))$$

Con lo que se concluye la inducción. Luego la propiedad que se buscaba demostrar resulta ser cierta para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**P5.** Lo que se usará a continuación es la derivada de un producto y la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} f &= \cos(kg) \\ f' &= -kg' \sin(kg) \Rightarrow \frac{f'}{g'} = -k \sin(kg) \\ f'' &= (-kg' \sin(kg))' = -kg'' \sin(kg) - (kg')^2 \cos(kg) = g'' \frac{f'}{g'} - (kg')^2 f \\ &\Rightarrow f'' - f' \frac{g''}{g'} + (kg')^2 f = 0 \end{aligned}$$

**P6.** Recordemos en primer lugar que la derivada de  $f$  en  $x_0$  corresponde al límite:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Luego tendremos que:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 + \beta h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)) - (f(x_0 + \beta h) - f(x_0))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \alpha \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha h} - \beta \frac{f(x_0 + \beta h) - f(x_0)}{\beta h} \end{aligned}$$

Es inmediato ver que, haciendo un cambio de variable adecuado  $u = \alpha h$  y  $v = \beta h$ :

$$\begin{aligned} (i) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha h} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} = f'(x_0) \\ (ii) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \beta h) - f(x_0)}{\beta h} &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v} = f'(x_0) \end{aligned}$$

Por lo que tenemos finalmente por álgebra de límites:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 + \beta h)}{h} = \alpha f'(x_0) - \beta f'(x_0) = (\alpha - \beta) f'(x_0)$$

**P7.** Tenemos que se cumple:

$$|f(x) - f(y)| \leq a(x - y)^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  con  $x \neq y$ . Dividiendo por  $|x - y|$  la expresión anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| &\leq a|x - y| \\ -a|x - y| &\leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq a|x - y| \end{aligned}$$

Considerando el límite  $x \rightarrow y$ , vemos que ambos extremos de la desigualdad tienden a cero. Luego, en virtud del Teorema del Sandwich, el límite

$$\lim_{x \rightarrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(y)$$

Existe y vale cero  $\forall y \in \mathbb{R}$ .

# SOLUCIÓN APUNTE MA1002

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### SEMANA 4

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas  
Use este material con responsabilidad.

**P1.**

- a) Es condición del problema que  $v = 1000\text{cm}^3 = 1$  litro. Además, observando la figura se concluye que:

$$v = axy \quad s = 2(a+x)(a+y)$$

Es fácil despejar  $y$  de la expresión del volumen para obtener

$$s = 2(a+x) \left( a + \frac{v}{ax} \right)$$

- b) Desarrollando la expresión de la superficie y derivando (recuerde que  $a$  no es variable):

$$\begin{aligned} s &= 2(a+x) \left( a + \frac{v}{ax} \right) = 2 \left( a^2 + ax + \frac{v}{x} + \frac{v}{a} \right) \\ \frac{ds}{dx} &= 2 \left( a - \frac{v}{x^2} \right) \end{aligned}$$

Esta derivada solo se anula si

$$x = \pm \sqrt{\frac{v}{a}}$$

Por lo que estos dos valores son candidatos a mínimo. Sabemos que la solución negativa no tiene sentido para el problema. Además, si derivamos por segunda vez obtenemos:

$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{4v}{x^3}$$

Expresión que es positiva para  $x = \sqrt{\frac{v}{a}}$ . Luego por la proposición 2.2 concluimos que este valor de  $x$  es un mínimo.

- c) Usando el resultado anterior, podemos escribir:

$$s = 2(a+x) \left( a + \frac{v}{ax} \right) = 2 \left( a + \sqrt{\frac{v}{a}} \right) \left( a + \frac{v}{a} \sqrt{\frac{a}{v}} \right) = 2 \left( a + \sqrt{\frac{v}{a}} \right)^2$$

Derivando esta expresión obtenemos:

$$\begin{aligned} s' &= 4 \left( a + \sqrt{\frac{v}{a}} \right) \left( a + \sqrt{va}^{-\frac{1}{2}} \right)' \\ &= 4 \left( a + \sqrt{\frac{v}{a}} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{va}^{-\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}$$

Dadas las condiciones físicas del problema ( $a, x, y > 0$ ), la única posibilidad de que esta derivada se anule es que

$$1 - \frac{1}{2} \sqrt{va}^{-\frac{3}{2}} = 0 \Leftrightarrow a^3 = \frac{v}{4} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{v}{4}}$$

Si calculamos la segunda derivada obtenemos que:

$$\begin{aligned}s'' &= 4 \left( a + \sqrt{\frac{v}{a}} \right)' \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{v} a^{-\frac{3}{2}} \right) + 4 \left( a + \sqrt{\frac{v}{a}} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{v} a^{-\frac{3}{2}} \right)' \\ &= 4 \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{v} a^{-\frac{3}{2}} \right)^2 + 3 \sqrt{v} a^{-\frac{5}{2}} \left( a + \sqrt{\frac{v}{a}} \right)\end{aligned}$$

Si evaluamos esta segunda derivada en  $a = \sqrt[3]{\frac{v}{4}}$ , sabemos que el primer término se anula y el segundo es siempre positivo, por lo que nuevamente por la proposición 2.2 concluimos que este valor de  $a$  es un mínimo. Finalmente los valores óptimos de  $a$ ,  $x$  e  $y$  son:

$$\begin{aligned}a &= \sqrt[3]{\frac{v}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2v} \\ x &= \sqrt{\frac{v}{a}} = \sqrt{\frac{2v}{\sqrt[3]{2v}}} = \sqrt{\sqrt[3]{4v^2}} = \sqrt[3]{2v} \\ y &= \frac{v}{ax} = \frac{v}{a} \sqrt{\frac{a}{v}} = \sqrt{\frac{v}{a}} = \sqrt[3]{2v}\end{aligned}$$

Es interesante notar que la forma que minimiza la superficie es un paralelepípedo con un par de caras cuadradas y con las restantes caras de lado menor exactamente igual a la mitad del lado del cuadrado. Como  $v = 1000\text{cm}^3 \Rightarrow \sqrt[3]{v} = 10\text{cm}$ , se tiene de forma explícita que  $a = 5\sqrt[3]{2}\text{cm}$  y  $x = y = 10\sqrt[3]{2}\text{cm}$ .

**P2.** Recordemos que una función  $f$  es convexa cuando  $f'' > 0$ .

1) Sea  $h = \ln(f)$ . Derivando obtenemos:

$$h' = \frac{f'}{f} \quad h'' = \frac{f f'' - (f')^2}{f^2}$$

De donde se puede despejar  $f''$  como:

$$f'' = \frac{h'' f^2 + (f')^2}{f}$$

Como  $f : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ , se cumple que  $f > 0$ . Además, si  $f$  es log-convexa entonces  $h'' > 0$  y por lo tanto  $f'' > 0$ . Es decir,  $f$  es convexa.

Un contraejemplo sencillo para la recíproca es  $f(x) = x^2$ . Vemos que  $f$  resulta ser convexa ya que  $f''(x) = 2 > 0$ , pero  $h''(x) = -\frac{2}{x^2} < 0$  nos dice que no es log-convexa.

II) Consideremos la misma función  $h$  anterior y definamos  $g = f^\alpha$ , con  $\alpha > 0$ . Derivando  $g$  obtenemos:

$$\begin{aligned} g' &= \alpha f^{\alpha-1} f' \\ g'' &= \alpha(\alpha-1) f^{\alpha-2} (f')^2 + \alpha f^{\alpha-1} f'' \\ g'' &= \underbrace{\alpha^2 f^\alpha \left(\frac{f'}{f}\right)^2}_{>0} + \underbrace{\alpha f^\alpha \left(\frac{f''}{f} - \frac{(f')^2}{f^2}\right)}_{>0} \end{aligned}$$

Es claro que si  $f$  es log-convexa (es decir,  $h'' > 0$ ), entonces  $g'' > 0$  y por lo tanto  $f^\alpha$  es convexa, para cualquier  $\alpha > 0$ . Para ver el caso recíproco, es decir, cuando se tiene que  $f^\alpha$  es convexa para todo  $\alpha > 0$  ( $g'' > 0$ ), consideremos el siguiente despeje de la expresión anterior:

$$h'' = \frac{g'' - \alpha^2 f^\alpha \left(\frac{f'}{f}\right)^2}{\alpha f^\alpha} \quad (2)$$

Sabemos que el denominador es positivo puesto que  $f > 0$  y  $\alpha > 0$ . Luego advertimos que:

$$f \text{ es log-convexa} \Leftrightarrow g'' > \alpha^2 f^\alpha \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \quad (3)$$

La idea es aprovechar el hecho de que (1) será válido siempre para todo  $\alpha > 0$ . Por lo tanto, buscaremos elegir un  $\alpha$  lo suficientemente pequeño que nos permita concluir la desigualdad que necesitamos.

Notemos que cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , fijando  $x$ , tenemos que  $\alpha^2 \rightarrow 0$  y  $f^\alpha \rightarrow f^0 = 1$  (gracias a que  $f \neq 0$ ). Luego

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^2 f^\alpha \left(\frac{f'}{f}\right)^2 = 0$$

Esto significa por definición que:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \alpha > 0, |\alpha - 0| < \delta \Rightarrow \left| \alpha^2 f^\alpha \left(\frac{f'}{f}\right)^2 - 0 \right| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < \alpha < \delta \Rightarrow \alpha^2 f^\alpha \left(\frac{f'}{f}\right)^2 < \varepsilon \end{aligned}$$

Puesto que  $f^\alpha$  es log-convexa, tenemos que  $g'' > 0$ . Usando la definición de límite, para  $\varepsilon = g''$  existe  $\delta > 0$  tal que:

$$\alpha^2 f^\alpha \left(\frac{f'}{f}\right)^2 < g''$$

Tomando cualquier  $\alpha$  en  $(0, \delta)$  concluimos que  $f$  es log-convexa gracias a la proposición (2) obtenida de (1).

**P3.**  $f(x) = (x+1) \ln \left( \left| \frac{x+1}{x} \right| \right)$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

a)

$$f(x) = (x+1) \ln \left( \left| \frac{x+1}{x} \right| \right) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \vee \left| \frac{x+1}{x} \right| = 1$$

El primer caso nos entrega  $x = -1$ , pero para este valor el logaritmo se indefine. El segundo caso nos entrega:

$$\frac{x+1}{x} = 1 \vee \frac{x+1}{x} = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Luego el cero de la función es  $x = -\frac{1}{2}$ . Antes de ver los signos de la función, nos interesa saber cuándo la expresión dentro del logaritmo está por debajo y por encima de 1.

$$\begin{aligned} \left| \frac{x+1}{x} \right| < 1 &\Leftrightarrow -1 < \frac{x+1}{x} < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < 1 + \frac{1}{x} < 1 \\ &\Leftrightarrow -2 < \frac{1}{x} < 0 \end{aligned}$$

Para que lo último ocurra necesitamos que  $x < 0$ . Considerando esto podemos despejar  $x$  y obtener:

$$\left| \frac{x+1}{x} \right| < 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

Luego se cumple que:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, -1/2)$	$(-1/2, 0)$	$(0, \infty)$
$\ln \left( \left  \frac{x+1}{x} \right  \right)$	-	-	+	+
$x+1$	-	+	+	+
$f(x)$	+	-	+	+

b) Primero veamos las asíntotas horizontales (los límites hacia  $-\infty$  y  $\infty$ ).

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x+1) \ln \left( \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \right)$$

Cuando  $x \rightarrow \infty$  podemos asumir que  $x > 0$  y sacar simplemente el valor absoluto. Notemos que  $x \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0$ . Por definición de límite esto significa particularmente que  $\exists m < 0$  tal que  $\forall x \leq m$  se tendrá necesariamente que  $-1 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow 0 < 1 + \frac{1}{x}$ . Luego en el límite podemos deshacernos del valor absoluto de la misma forma hacia ambos infinitos.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x+1) \ln \left( \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \right) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x+1) \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Es decir, posee asíntota horizontal  $y = 1$  hacia ambos extremos.

Veamos ahora los límites hacia 0 y  $-1$ . Sabemos que:

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$$

Gracias al valor absoluto podemos afirmar que:

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \rightarrow +\infty$$

Puesto que  $u \rightarrow \infty \Rightarrow \ln(u) \rightarrow \infty$ , esto se traduce en que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1) \ln \left( \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \right) = +\infty$$

Es decir, existe una asíntota vertical en  $x = 0$  hacia  $+\infty$  por ambos lados. Por otro lado tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} (x+1) \ln \left( \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \right) = \lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{\ln \left( \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \right)}{\frac{1}{x+1}}$$

Sabemos que  $u \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln(u) \rightarrow -\infty$ , por lo que:

$$x \rightarrow -1 \Rightarrow \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln \left( \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \right) \rightarrow -\infty$$

Y además  $x \rightarrow -1^\pm \Rightarrow (x+1) \rightarrow 0^\pm \Rightarrow \frac{1}{x+1} \rightarrow \pm\infty$ . Puesto que tanto por la izquierda como por la derecha tenemos una indefinición  $\infty/\infty$ , podemos analizar ambos casos simultáneamente utilizando la regla de L'Hôpital. Recordemos que  $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$ . Veamos entonces el límite de las derivadas:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{(\ln(|\frac{x+1}{x}|))'}{(\frac{1}{x+1})'} &= \lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{\frac{x}{x+1} (1 + \frac{1}{x})'}{-\frac{1}{(x+1)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{\frac{x}{x+1} \frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{x(x+1)^2}{x^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{x+1}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que el límite de las derivadas existe, por la regla de L'Hôpital concluimos que:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

Podemos reparar esta función para que sea continua en  $x = -1$  definiendo  $f(-1) = 0$ .

- c)  $g(x) = \ln|x|$ . Esta función es diferenciable en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , por lo que será diferenciable en intervalos que no contengan al cero. Si queremos intervalos de la forma  $[x, x+1]$ , necesitamos que  $x \notin [-1, 0]$ . Podemos usar el TVM entonces en  $[x, x+1]$  para obtener que existe  $c \in [x, x+1]$  tal que:

$$g'(c) = \frac{g(x+1) - g(x)}{(x+1) - x} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \ln \left( \left| \frac{x+1}{x} \right| \right) \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \ln \left( \frac{x+1}{x} \right)$$

Lo último gracias a que  $\frac{x+1}{x} > 0$  cuando  $x \notin [-1, 0]$ . Luego, gracias al decrecimiento estricto de  $\frac{1}{x}$ , tenemos que  $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ . Se concluye que:

$$\frac{1}{x+1} < \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) < \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$$

d) Calculemos  $f'$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1) \ln \left( \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \right) \\ f'(x) &= (x+1)' \ln \left( \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \right) + (x+1) \left( \ln \left( \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \right) \right)' \\ f'(x) &= \ln \left( \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \right) + (x+1) \frac{x}{x+1} \frac{-1}{x^2} \\ f'(x) &= \ln \left( \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \right) - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

e) En  $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ ,  $f'(x) = \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x}$ . Como se cumple que:

$$\frac{1}{x+1} < \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) < \frac{1}{x} \Rightarrow \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) - \frac{1}{x} < 0$$

Tenemos que  $f'(x) < 0$  en  $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ , es decir, estrictamente decreciente.

f) Calculemos  $f''$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| - \frac{1}{x} \\ f''(x) &= \frac{x}{x+1} \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2(x+1)} \end{aligned}$$

Observamos de inmediato que el signo de  $f''$  depende del signo de  $(x+1)$ . Entonces:

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, -1) &\Rightarrow (x+1) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \text{Cóncava} \cap \\ x \in (-1, \infty) &\Rightarrow (x+1) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \text{Convexa} \cup \end{aligned}$$

g) Veamos en primer lugar que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| &= -\infty & \lim_{x \rightarrow -1^+} -\frac{1}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| &= +\infty & \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x} &= +\infty \end{aligned}$$

El álgebra de límites nos permite concluir que:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = +\infty$$

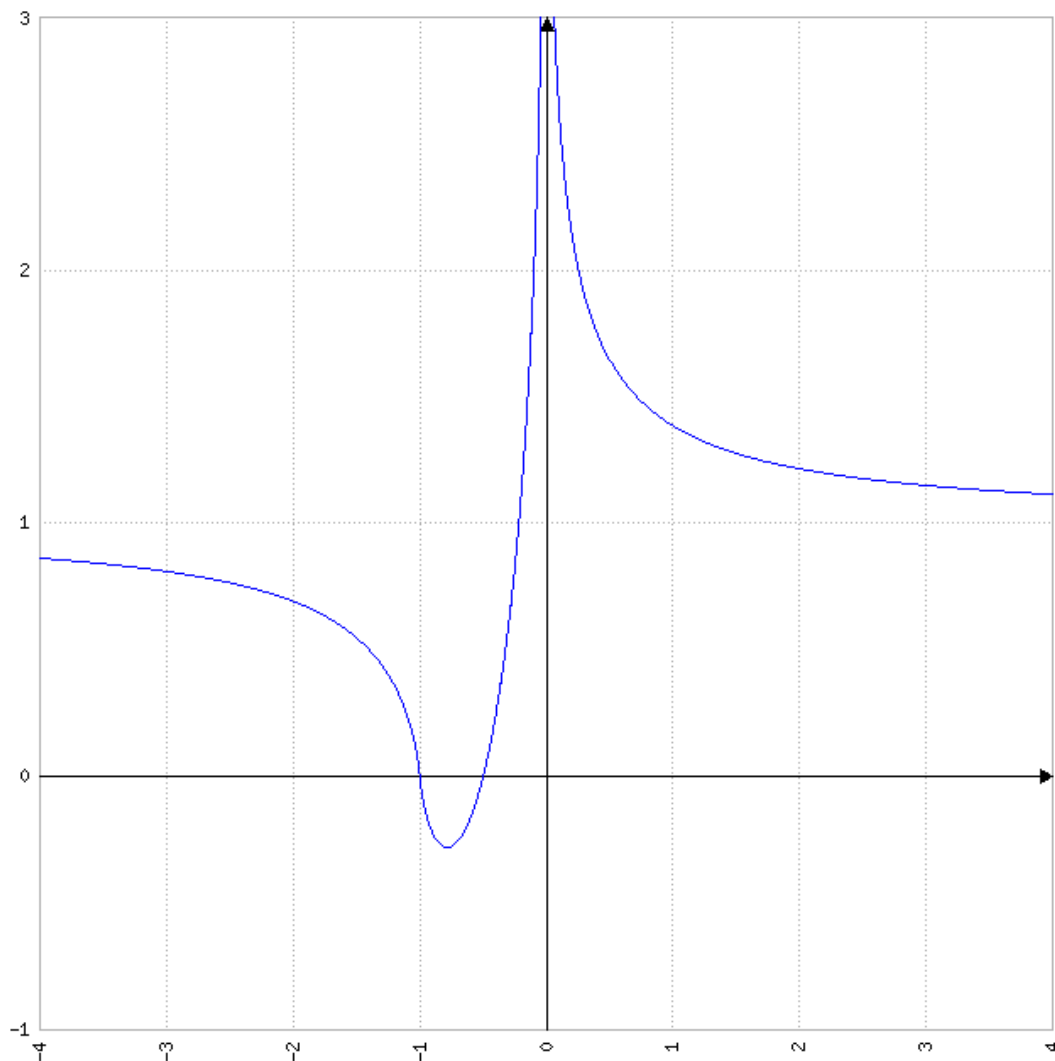
De la parte anterior sabemos que  $f'' > 0$  en  $(-1, \infty)$ , por lo que en  $(-1, 0)$   $f'$  es estrictamente creciente. Debido a los límites calculados recientemente, sabemos que cerca de  $-1$  la derivada es negativa, y cerca de  $0$  la derivada es positiva.

Podemos aplicar el TVI en algún intervalo  $[a, b] \subset (-1, 0)$  donde  $f'(a) < 0$  y  $f'(b) > 0$  para concluir que existe  $x_0 \in (-1, 0)$  tal que  $f'(x_0) = 0$ . Si existieran dos ceros distintos  $x_1$  y  $x_2$  con  $x_1 < x_2$ , entonces aplicando el TVM en  $[x_1, x_2]$  llegamos a que existe  $c \in (x_1, x_2)$  tal que:

$$f''(c)(x_2 - x_1) = f'(x_2) - f'(x_1) = 0 \Rightarrow f''(c) = 0$$

Lo que es una contradicción puesto que  $f'' > 0$  en este intervalo. En definitiva existe un único cero de  $f'$ , y por lo tanto un único cambio de signo. Todo esto significa que la función  $f$  en un principio decrece estrictamente ( $f' < 0$ ) hasta alcanzar un mínimo local (donde  $f'$  se anula), cuya naturaleza de mínimo es justificable gracias a que  $f'' > 0$ . Después de alcanzar este mínimo la función crece estrictamente ( $f' > 0$ ).

- h) Aquí se debe bosquejar la función con toda la información reunida pero simplemente adjuntaré una gráfica de la función.



**P4.**

- a) Tenemos que  $x$ : cobre corriente,  $y$ : cobre fino. Sabemos además que, siendo  $p$  el precio de venta del cobre corriente:

$$x + y \leq 9 \quad y = \frac{40 - 5x}{10 - x} \quad I = 3,6py + px \Rightarrow \frac{I}{p} = 3,6y + x$$

Para maximizar el ingreso, maximizaremos  $I/p$ . Reemplazando  $y$  en la expresión, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{I}{p} &= 3,6 \cdot \frac{40 - 5x}{10 - x} + x \\ \left(\frac{I}{p}\right)' &= 3,6 \cdot \frac{(40 - 5x)'(10 - x) - (40 - 5x)(10 - x)'}{(10 - x)^2} + 1 \\ \left(\frac{I}{p}\right)' &= \frac{-36}{(10 - x)^2} + 1 \end{aligned}$$

Esta derivada se anulará si:

$$\frac{-36}{(10 - x)^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow (10 - x)^2 - 6^2 = 0 \Leftrightarrow (16 - x)(4 - x) = 0$$

Debido a la restricción de capacidad instalada, la solución  $x = 16$  queda descartada. Una candidata para máximo es la solución  $x = 4$ . Al derivar nuevamente obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{I}{p}\right)' &= -36(10 - x)^{-2} + 1 \\ \left(\frac{I}{p}\right)'' &= -36 \cdot (-2)(10 - x)^{-3}(10 - x)' \\ \left(\frac{I}{p}\right)'' &= -72(10 - x)^{-3} \end{aligned}$$

Donde la segunda derivada es negativa cuando  $x = 4$ . Luego este valor es un máximo. La producción de cobre fino correspondiente es:

$$y = \frac{40 - 5 \cdot 4}{10 - 4} = \frac{10}{3}$$

Por lo que la producción diaria es de  $7, \bar{3}$  toneladas.

- b) Puesto que la función  $f$  es continua y diferenciable en  $(0, x)$ , con  $x \in \mathbb{R}^+$ , podemos ocupar el TVM para obtener que existe  $c \in (0, x)$  tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$$

Puesto que  $f'$  es creciente en  $\mathbb{R}^+$ , se cumple que  $f'(c) < f'(x)$ . De aquí concluimos que  $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ . Si tomamos la función  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  y la derivamos, obtenemos:

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \left( f'(x) - \frac{f(x)}{x} \right)$$

Puesto que  $x > 0$  y  $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$  gracias a lo demostrado anteriormente, concluimos que  $g'(x) > 0$ , esto es,  $g(x)$  es creciente.

**P5.**

- a) Esta parte es aplicación directa de las propiedades de derivación. Para estudiar la monotonía será conveniente calcular  $f'(x)$ . Antes de ello calculemos la derivada de la función  $\arctan(x)$ . Para ello, usaremos la derivación de una función inversa. Derivando primero la tangente:

$$\tan'(x) = \left( \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$$

Lo último se obtiene simplemente usando la identidad  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$  y dividiendo por  $\cos^2(x)$ . Derivando ahora la arcotangente:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ahora procederemos a derivar  $f$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= g(b - ax^3) \cdot h(\arctan(cx)) \\ f'(x) &= (g(b - ax^3))' \cdot h(\arctan(cx)) + g(b - ax^3) \cdot (h(\arctan(cx)))' \\ f'(x) &= g'(b - ax^3) \cdot (b - ax^3)' \cdot h(\arctan(cx)) + g(b - ax^3) \cdot h'(\arctan(cx)) \cdot (\arctan(cx))' \\ f'(x) &= g'(b - ax^3) \cdot (-3ax^2) \cdot h(\arctan(cx)) + g(b - ax^3) \cdot h'(\arctan(cx)) \cdot \arctan'(cx) \cdot (cx)' \\ f'(x) &= -3ax^2 g'(b - ax^3) h(\arctan(cx)) + g(b - ax^3) h'(\arctan(cx)) \frac{c}{1 + (cx)^2} \end{aligned}$$

Sabemos por el enunciado que  $g < 0$  y  $h > 0$ . Además las funciones son crecientes, por lo que  $g' \geq 0$  y  $h' \geq 0$ . Sabemos también que  $a, b, c > 0$ . Luego tenemos término a término:

$$\begin{aligned} -3ax^2 &< 0 \\ g'(b - ax^3) &\geq 0 \\ h(\arctan(cx)) &> 0 \\ g(b - ax^3) &< 0 \\ h'(\arctan(cx)) &\geq 0 \\ \frac{c}{1 + (cx)^2} &> 0 \end{aligned}$$

Es directo entonces que  $f'(x) \leq 0$ , es decir, la función es decreciente.

b) Separando las desigualdades y recordando que  $x > 0$ , podemos ver que:

$$\begin{aligned} 1 + \ln(x) < (x+1)\ln(x+1) - x\ln(x) &\Leftrightarrow 1 < (x+1)(\ln(x+1) - \ln(x)) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) \\ (x+1)\ln(x+1) - x\ln(x) < 1 + \ln(x+1) &\Leftrightarrow x(\ln(x+1) - \ln(x)) < 1 \\ &\Leftrightarrow \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Por lo tanto lo que nos piden demostrar es equivalente a que:

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

Esto sugiere el uso del TVM en la función  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = \ln(x)$ , cuya derivada vale  $f'(x) = \frac{1}{x}$ . Gracias a la continuidad y diferenciabilidad de  $f(x) = \ln(x)$  en  $(0, \infty)$ , podemos aplicar el TVM en un intervalo  $[x, x+1]$  con  $x \in (0, \infty)$ . Luego tenemos que existe  $c \in (x, x+1)$  tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \ln(x+1) - \ln(x)$$

Y debido al decrecimiento estricto de la función  $1/x$  y ya que  $c \in (x, x+1)$ , se cumple que:

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

Uniendo ambos resultados concluimos que:

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

Que ya vimos que era equivalente a lo que nos pedían demostrar.

Una forma algo más directa era considerar inmediatamente la función  $f(x) = x \ln(x)$  cuya derivada vale  $f'(x) = 1 + \ln(x)$ . Aplicando el TVM en el mismo intervalo  $[x, x+1]$  llegamos a que:

$$1 + \ln(c) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln(x)$$

Utilizando el crecimiento de la función  $1 + \ln(x)$  se concluye el resultado.

c) De la parte anterior tenemos que se cumple:

$$1 + \ln(k) < (k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) < 1 + \ln(k+1), \quad k \in \mathbb{N}$$

Tengamos en cuenta que  $\ln(1) = 0$ , por lo que su presencia en sumas es indiferente (se puede agregar o quitar sin ningún problema).

Si hacemos la sumatoria desde 1 hasta  $n$  en la primera desigualdad obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 1 + \ln(k) &< \sum_{k=1}^n (k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) \\ \Leftrightarrow n + \sum_{k=1}^n \ln(k) &< (n+1)\ln(n+1) - \ln(1) \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \ln(k) &< (n+1)\ln(n+1) - n \end{aligned}$$

Si hacemos ahora la sumatoria desde 1 hasta  $n - 1$  en la segunda desigualdad obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_1^{n-1} (k+1) \ln(k+1) - k \ln(k) &< \sum_1^{n-1} 1 + \ln(k+1) \\ \Leftrightarrow n \ln(n) - \ln(1) &< (n-1) + \sum_1^{n-1} \ln(k+1) \\ \Leftrightarrow n \ln(n) - (n-1) &< \sum_2^n \ln(k) = \sum_1^n \ln(k) \end{aligned}$$

Uniando ambos resultados concluimos que:

$$n \ln(n) - (n-1) < \sum_1^n \ln(k) < (n+1) \ln(n+1) - n$$

# SOLUCIÓN APUNTE MA1002

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### SEMANA 5

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas  
Use este material con responsabilidad.

**P1.**

a)

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin(x) \cos(x)}{\sqrt{1 + \sin(x)}} dx \quad ; u = 1 + \sin(x) \rightarrow du = \cos(x) dx \\ &= \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du = \int u^{\frac{1}{2}} - \int u^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{u}(u-3) + c \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{1 + \sin(x)}(\sin(x) - 2) + c \quad ; c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}} dx \quad ; u = 1 + \sqrt{x} \rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \rightarrow 2(u-1)du = dx \\ &= \int \frac{2(u-1)^2}{\sqrt{u}} du = 2 \int \frac{u^2 - 2u + 1}{\sqrt{u}} du = 2 \int \left( u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}} \right) du \\ &= \frac{4}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3} u^{\frac{3}{2}} + 4u^{\frac{1}{2}} + c = \frac{4}{15} \sqrt{u}(3u^2 - 5u + 1) + c \\ &= \frac{4}{15} (3x + \sqrt{x} + 13) \sqrt{1 + \sqrt{x}} + c \quad ; c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & \int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2} (\sqrt{1 + x^2})^3} dx \\ &= \int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}} dx \quad ; u = 1 + \sqrt{1 + x^2} \rightarrow du = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} dx \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}} + c \quad ; c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**P2.** Probablemente el enunciado debería decir :

$$f(x) = g'(x) + h'(x)g(x)$$

Dicho esto, veamos que la definición de primitiva nos dice que:

$$\int f(x)e^{h(x)}dx = e^{h(x)}g(x) + c \Leftrightarrow (e^{h(x)}g(x))' = f(x)e^{h(x)}$$

En efecto, el resultado es inmediato:

$$\begin{aligned} (e^{h(x)}g(x))' &= e^{h(x)}h'(x)g(x) + e^{h(x)}g'(x) \\ &= (h'(x)g(x) + g'(x))e^{h(x)} \\ &= f(x)e^{h(x)} \end{aligned}$$

**P3.**

$$\int g(x)dx = -\ln f(x) + c \Leftrightarrow (-\ln f(x))' = g(x) \quad [\text{Por definición}]$$

En efecto,

$$(-\ln f(x))' = -\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g(x)f(x)}{f(x)}$$

Y puesto que  $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , se puede simplificar por  $f(x)$  y se concluye el resultado.

**P4.** Como  $f(x)$  es primitiva de  $f'(x)$ ,  $f'(x) = f(x)$  y luego  $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$ .

Se tiene entonces:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int dx = x + c$$

Por otro lado,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln |f(x)| + c = \ln f(x) + c$$

Lo último gracias a que  $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, por propiedad de primitivas, solo difieren en una constante, es decir:

$$\ln f(x) - x = c \Leftrightarrow \ln f(x) = x + c \Leftrightarrow f(x) = e^{x+c}.$$

# SOLUCIÓN APUNTE MA1002

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### SEMANA 6

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas  
Use este material con responsabilidad.

**E3.**

a)

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int x^n \sin(x) dx \quad ; \left[ \begin{array}{l} u = x^n \rightarrow du = nx^{n-1} dx \\ dv = \sin(x) dx \rightarrow v = -\cos(x) \end{array} \right] \\
 &= -x^n \cos(x) + n \int x^{n-1} \cos(x) dx \quad ; \left[ \begin{array}{l} u = x^{n-1} \rightarrow du = (n-1)x^{n-2} dx \\ dv = \cos(x) dx \rightarrow v = \sin(x) \end{array} \right] \\
 &= -x^n \cos(x) + n \left( x^{n-1} \sin(x) - (n-1) \int x^{n-2} \sin(x) dx \right) \\
 &= -x^n \cos(x) + nx^{n-1} \sin(x) - n(n-1)I_{n-2}.
 \end{aligned}$$

b) Análogo al ejercicio a).

c)

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int x^n e^x dx \quad ; \left[ \begin{array}{l} u = x^n \rightarrow du = nx^{n-1} dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{array} \right] \\
 &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - nI_{n-1}.
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int \sin^n(x) dx \quad ; \left[ \begin{array}{l} u = \sin^{n-1}(x) \rightarrow du = (n-1) \sin^{n-2}(x) \cos(x) dx \\ dv = \sin(x) dx \rightarrow v = -\cos(x) \end{array} \right] \\
 &= -\sin^{n-1}(x) \cos(x) + (n-1) \int \sin^{n-2}(x) \cos^2(x) dx \\
 (*) \quad &\text{Como } \sin^{n-2}(x) \cos^2(x) = \sin^{n-2}(x)(1 - \sin^2(x)) = \sin^{n-2}(x) - \sin^n(x) \\
 &= -\sin^{n-1}(x) \cos(x) + (n-1) \int (\sin^{n-2}(x) - \sin^n(x)) dx \\
 &= -\sin^{n-1}(x) \cos(x) + (n-1)(I_{n-2} - I_n)
 \end{aligned}$$

Despejando  $I_n$  de esta última igualdad obtenemos:

$$I_n = \frac{-\sin^{n-1}(x) \cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

e) Análogo al ejercicio d).

f)

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int x^n \sinh(2x) dx \quad ; \left[ \begin{array}{l} u = x^n \rightarrow du = nx^{n-1} dx \\ dv = \sinh(2x) dx \rightarrow v = \frac{1}{2} \cosh(2x) \end{array} \right] \\
 &= \frac{1}{2} x^n \cosh(2x) - \frac{n}{2} \int x^{n-1} \cosh(2x) dx \quad ; \left[ \begin{array}{l} u = x^{n-1} \rightarrow du = (n-1)x^{n-2} dx \\ dv = \cosh(2x) dx \rightarrow v = \frac{1}{2} \sinh(2x) \end{array} \right] \\
 &= \frac{1}{2} x^n \cosh(2x) - \frac{n}{2} \left( \frac{1}{2} x^{n-1} \sinh(2x) - \frac{n-1}{2} \int x^{n-2} \sinh(2x) dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} x^n \cosh(2x) - \frac{n}{4} x^{n-1} \sinh(2x) + \frac{n(n-1)}{4} I_{n-2}.
 \end{aligned}$$

**E5.** El cambio de variable sugerido implica que:

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) ; \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2} ; \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2} ; dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

a)

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{2du}{2u} = \ln|u| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

b)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\cos(x)} &= \int \frac{2du}{1-u^2} = \int \left( \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du = \ln|1+u| - \ln|1-u| + c \\
 &= \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c = \ln\left|\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + c
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{1+\sin(x)} &= \int \frac{2du}{(1+u^2)+2u} = \int \frac{2du}{(1+u)^2} \quad ; v = 1+u \rightarrow dv = du \\
 &= \int \frac{2}{v^2} dv = \frac{-2}{1+u} + c = \frac{-2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + c
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{1-\cos(x)} &= \int \frac{2du}{(1+u^2)-(1-u^2)} = \int \frac{du}{u^2} = \frac{-1}{u} + c \\
 &= \frac{-1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + c
 \end{aligned}$$

e)

$$\int \frac{dx}{\sin(x) + \cos(x)} = \int \frac{2du}{2u + 1 - u^2} = \int \frac{-2du}{(u - 1 + \sqrt{2})(u - 1 - \sqrt{2})}$$

Separemos esta última fracción:

$$\frac{-2}{(u - 1 + \sqrt{2})(u - 1 - \sqrt{2})} = \frac{A}{u - 1 + \sqrt{2}} + \frac{B}{u - 1 - \sqrt{2}} = \frac{(A + B)u - (A + B) + (B - A)\sqrt{2}}{(u - 1 + \sqrt{2})(u - 1 - \sqrt{2})}$$

Luego, imponiendo  $A + B = 0$  y  $(B - A)\sqrt{2} = -2$ , se tiene  $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $B = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Se sigue que:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin(x) + \cos(x)} &= \int \frac{-2du}{(u - 1 + \sqrt{2})(u - 1 - \sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left( \frac{1}{u - 1 + \sqrt{2}} - \frac{1}{u - 1 - \sqrt{2}} \right) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \ln |u - 1 + \sqrt{2}| - \ln |u - 1 - \sqrt{2}| \right) + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u - 1 + \sqrt{2}}{u - 1 - \sqrt{2}} \right| + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 + \sqrt{2}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - \sqrt{2}} \right| + c \end{aligned}$$

**E6.**

a)

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad ; \text{ como } x^2 > 1, \text{ hagamos } x = \sec(v) \rightarrow dx = \sec(v) \tan(v) dv \\ &= \int \frac{\sec(v) \tan(v) dv}{\sqrt{\sec^2(v) - 1}} = \int \frac{\sec(v) \tan(v) dv}{\tan(v)} \\ &= \int \sec(v) dv = \ln |\sec(v) + \tan(v)| + c \end{aligned}$$

Recordando que  $\tan^2(v) = \sec^2(v) - 1 = x^2 - 1$ , tenemos finalmente:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c.$$

b)

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad ; \text{ como } x \in \mathbb{R}, \text{ hagamos } x = \tan(v) \rightarrow dx = \sec^2(v) dv \\ &= \int \frac{\sec^2(v) dv}{\sqrt{\tan^2(v) + 1}} = \int \frac{\sec^2(v) dv}{\sec(v)} = \int \sec(v) dv = \ln |\sec(v) + \tan(v)| + c \end{aligned}$$

Recordando que  $\sec^2(v) = \tan^2(v) + 1 = x^2 + 1$ , tenemos finalmente:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| + c.$$

**E7.**

$$\begin{aligned} & \int \frac{g(x)g'(x)}{\sqrt{1+g(x)^2}} \quad ; u = 1 + g(x)^2 \rightarrow du = 2g(x)g'(x)dx \\ &= \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + c = \sqrt{1+g(x)^2} + c. \end{aligned}$$

**P1.**

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} dx &= \int \left( 1 - \frac{1}{1+\sin(x)} \right) dx \\ &= x - \int \frac{dx}{1+\sin(x)} \quad ; \text{usamos el cambio } u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= x - \int \frac{2du}{(1+u^2)+2u} = x - \int \frac{2du}{(1+u)^2} \quad ; v = 1+u \rightarrow dv = du \\ &= x - \int \frac{2dv}{v^2} = x + \frac{2}{v} + c \\ &= x + \frac{2}{1+u} + c = x + \frac{2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + c \end{aligned}$$

**P2.a)**

1.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{\cos(x)}{\cos(x)} dx = \int dx = x + c \\ I_2 &= \int \frac{\cos(2x)}{\cos^2(x)} dx = \int \frac{2\cos^2(x) - 1}{\cos^2(x)} dx \\ &= \int (2 - \sec^2(x)) dx = 2x - \tan(x) + c \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} J_n &= \int \frac{\sin(x)}{\cos^{n+1}(x)} dx \quad ; \left[ \begin{array}{l} u = \frac{1}{\cos^{n+1}(x)} \rightarrow du = (n+1) \frac{\sin(x)}{\cos^{n+2}(x)} dx \\ dv = \sin(x) dx \rightarrow v = -\cos(x) \end{array} \right] \\ &= \frac{-1}{\cos^n(x)} + (n+1) \int \frac{\sin(x)}{\cos^{n+1}(x)} dx = \frac{-1}{\cos^n(x)} + (n+1)J_n \end{aligned}$$

Luego, despejando  $J_n$  de la última igualdad se obtiene:

$$J_n = \frac{1}{n \cos^n(x)}$$

3.

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int \frac{\cos(nx+x)}{\cos^{n+1}(x)} dx = \int \frac{\cos(nx)\cos(x) - \sin(nx)\sin(x)}{\cos^{n+1}(x)} dx \\ &= \int \frac{\cos(nx)}{\cos^n(x)} dx - \int \frac{\sin(nx)\sin(x)}{\cos^{n+1}(x)} dx = I_n - \int \frac{\sin(nx)\sin(x)}{\cos^{n+1}(x)} dx \end{aligned}$$

Concentrémonos en esta última integral. Notemos que podemos ocupar la parte a.2 apropiadamente para integrar por partes:

$$\begin{aligned} &\int \frac{\sin(nx)\sin(x)}{\cos^{n+1}(x)} dx \quad ; \quad \left[ \begin{array}{l} u = \sin(nx) \rightarrow du = n \cos(nx) \\ dv = \frac{\sin(x)}{\cos^{n+1}(x)} dx \rightarrow v = \frac{1}{n \cos^n(x)} \end{array} \right] \\ &= \frac{\sin(nx)}{n \cos^n(x)} - \int \frac{\cos(nx)}{\cos^n(x)} dx = \frac{\sin(nx)}{n \cos^n(x)} - I_n \end{aligned}$$

Luego tenemos finalmente:

$$I_{n+1} = I_n - \left( \frac{\sin(nx)}{n \cos^n(x)} - I_n \right) = 2I_n - \frac{\sin(nx)}{n \cos^n(x)}.$$

**P2.b)**

$$\begin{aligned} &\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx \quad ; \text{ya que } x^2 \leq a^2, \text{ hacemos } x = a \cos(v) \rightarrow dx = -a \sin(v) dv \\ &= - \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2 \cos^2(v)}}{a^2 \cos^2(v)} a \sin(v) dv = - \int \tan^2(v) dv \\ &= \int (1 - \sec^2(v)) dv = v - \tan(v) + c \end{aligned}$$

Recordemos que  $\cos(v) = \frac{x}{a}$ , por lo que:

$$\tan^2(v) = \frac{1}{\cos^2(v)} - 1 = \frac{a^2}{x^2} - 1 = \frac{a^2 - x^2}{x^2}$$

Finalmente tenemos:

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = \arccos\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} + c.$$

**P3.a)**

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{x(\ln(x) + \ln^2(x))} \quad ; u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ &= \int \frac{du}{u(u+1)} = \int \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \ln|u| - \ln|u+1| + c \\ &= \ln \left| \frac{u}{u+1} \right| + c = \ln \left| \frac{\ln(x)}{\ln(x)+1} \right| + c \end{aligned}$$

**P3.b)**

$$\begin{aligned} & \int \frac{\cos(x)}{1 + \cos(x)} dx = \int \left( 1 - \frac{1}{1 + \cos(x)} \right) dx \\ = & x - \int \frac{dx}{1 + \cos(x)} \quad ; u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \\ = & x - \int \frac{2du}{(1+u^2) - (1-u^2)} = x - \int du = x - u + c = x - \tan\left(\frac{x}{2}\right) + c \end{aligned}$$

**P3.c)**

$$\begin{aligned} I &= \int \cos(\ln(x)) dx \quad ; \left[ \begin{array}{l} u = \cos(\ln(x)) \rightarrow du = \frac{-\sin(\ln(x))}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right] \\ &= x \cos(\ln(x)) + \int \sin(\ln(x)) dx \\ &= x \cos(\ln(x)) + J \\ J &= \int \sin(\ln(x)) dx \quad ; \left[ \begin{array}{l} u = \sin(\ln(x)) \rightarrow du = \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right] \\ &= x \sin(\ln(x)) - \int \cos(\ln(x)) dx \\ &= x \sin(\ln(x)) - I \end{aligned}$$

Juntando ambos resultados obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} I &= x \cos(\ln(x)) + J \\ J &= x \sin(\ln(x)) - I \end{aligned}$$

De donde se despeja:

$$\begin{aligned} I &= \frac{x}{2}(\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x))) + c \\ J &= \frac{x}{2}(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))) + c. \end{aligned}$$

**P4.a)**

$$\begin{aligned}\frac{5x^2 + 12x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4} &= \frac{5x^2 + 12x + 1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (4A+B+C)x + (4A-2B-C)}{(x-1)(x+2)^2}\end{aligned}$$

Luego resolvemos el sistema:

$$\begin{bmatrix} A+B &= & 5 \\ 4A+B+C &= & 12 \\ 4A-2B-C &= & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A=2 \\ B=3 \\ C=1 \end{matrix}$$

Usando lo anterior en la integral obtenemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2 + 12x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4} dx &= 2 \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{dx}{x+2} + \underbrace{\int \frac{dx}{(x+2)^2}}_{w=x+2 \rightarrow dw=dx} \\ &= 2 \ln|x-1| + 3 \ln|x+2| + \int w^{-2} dw \\ &= 2 \ln|x-1| + 3 \ln|x+2| - w^{-1} + c \\ &= \ln|(x-1)^2(x+2)^3| - \frac{1}{x+2} + c\end{aligned}$$

**P4.b)**

$$\begin{aligned}I_{m,n} &= \int x^m \ln^n(x) dx \quad ; \quad \left[ \begin{matrix} u = \ln^n(x) \rightarrow du = \frac{n \ln^{n-1}(x)}{x} dx \\ dv = x^m dx \rightarrow v = \frac{x^{m+1}}{m+1} \end{matrix} \right] \\ &= \frac{x^{m+1} \ln^n(x)}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m \ln^{n-1}(x) dx \\ &= \frac{x^{m+1} \ln^n(x)}{m+1} - \frac{n}{m+1} I_{m,n-1}\end{aligned}$$

Para calcular lo pedido debemos usar  $m = 2$  y  $n = 1$ , con lo que se tiene:

$$I_{2,1} = \frac{x^{2+1} \ln^1(x)}{2+1} - \frac{1}{2+1} I_{2,0} = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + c$$

**P5.a)**

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+x)} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1+x} = \frac{(A+C)x^2 + (A+B)x + (B+C)}{(1+x^2)(1+x)}$$

$$\begin{bmatrix} A+C & = & 0 \\ A+B & = & 1 \\ B+C & = & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = \frac{-1}{2} \end{matrix}$$

Usando el resultado en la integral obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)} dx &= \frac{1}{2} \left( \int \frac{1+x}{1+x^2} dx - \int \frac{dx}{1+x} \right) = \frac{1}{2} \left( \int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{1+x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \int \frac{x}{1+x^2} dx + \arctan(x) - \ln|1+x| \right) \quad ; u = 1+x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \int \frac{du}{2u} dx + \arctan(x) - \ln|1+x| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \ln|u| + \arctan(x) - \ln|1+x| \right) + c \\ &= \frac{1}{4} \left( \ln \left( \frac{1+x^2}{(1+x)^2} \right) + 2 \arctan x \right) + c \end{aligned}$$

**P5.b)**

$$\begin{aligned} &\int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)+\cos(x)} dx \quad ; \text{usamos el cambio de variable } u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \int \frac{2u}{(1+u^2)+2u+(1-u^2)} \cdot \frac{2du}{1+u^2} = 2 \int \frac{udu}{(1+u)(1+u^2)} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} \left( \ln \left( \frac{1+u^2}{(1+u)^2} \right) + 2 \arctan u \right) + c \quad [\text{Por parte 5.a}] \\ &= \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1+\tan^2(\frac{x}{2})}{(1+\tan(\frac{x}{2}))^2} \right) + x \right) + c \end{aligned}$$

**P5.c)**

$$\begin{aligned} &\int \arcsen \left( \sqrt{\frac{x}{1+x}} \right) dx \quad ; \left[ \begin{matrix} w = \arcsen \left( \sqrt{\frac{x}{1+x}} \right) \rightarrow dw = \frac{dx}{2\sqrt{x}(x+1)} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{matrix} \right] \\ &= x \arcsen \left( \sqrt{\frac{x}{1+x}} \right) - \int \frac{xdx}{2\sqrt{x}(x+1)} \end{aligned}$$

Calculemos esta última integral:

$$\begin{aligned} &\int \frac{xdx}{2\sqrt{x}(x+1)} \quad ; u = \sqrt{x} \rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ &= \int \frac{u^2}{1+u^2} du = \int \left( 1 - \frac{1}{1+u^2} \right) du \\ &= u - \arctan(u) + c = \sqrt{x} - \arctan(\sqrt{x}) + c \end{aligned}$$

Juntando todo obtenemos el resultado final:

$$\int \arcsen \left( \sqrt{\frac{x}{1+x}} \right) dx = x \arcsen \left( \sqrt{\frac{x}{1+x}} \right) - \sqrt{x} + \arctan(\sqrt{x}) + c$$

# SOLUCIÓN APUNTE MA1002

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### SEMANA 7

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas  
Use este material con responsabilidad.

#### P1.

- a) Del semestre anterior sabemos que  $q^x$  es estrictamente decreciente y positiva cuando  $0 < q < 1$ . Luego en  $[0, n]$  se cumple:

$$q^0 = 1 > q^x > 0 \quad \forall x \in [0, n]$$

Como  $q^x$  está definida para  $q \in \mathbb{R}^+$ , tenemos todas las hipótesis para afirmar que  $q^x$  es Riemann-integrable (puesto que es definida, acotada y monótona). Veamos que  $a_n$  es estrictamente creciente:

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^{n+1} q^x dx - \int_0^n q^x dx = \int_n^{n+1} q^x dx$$

Sea  $P \in \mathcal{P}_{n,n+1}$ ,  $P = \{x_0, \dots, x_r\}$  equiespaciada, luego:

$$\int_n^{n+1} q^x dx \geq \sum_{i=1}^r q^{x_i} |P| \quad ; q^x > 0, \forall x \in [n, n+1], \text{ y } |P| > 0, \text{ luego } \sum_{i=1}^r q^{x_i} |P| > 0 \text{ y}$$

$$a_{n+1} - a_n \geq \sum_{i=1}^r q^{x_i} |P| > 0 \Rightarrow a_n \text{ estrictamente creciente.}$$

- b) Sea  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  una partición de  $[0, n]$  donde  $x_i = i$ . Como  $q^x$  es decreciente,  $M_i(q^x) = q^{x_{i-1}}$  y  $m_i(q^x) = q^{x_i}$ . Además  $\Delta x_i = 1$ . Luego:

$$\begin{aligned} s(q^x, P) &= \sum_{i=1}^n q^{x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n q^i = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q} \\ S(q^x, P) &= \sum_{i=1}^n q^{x_{i-1}} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n q^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned}$$

- c)  $\forall n \in \mathbb{N}$  se tiene:

$$\begin{aligned} s(q^x, P) &\leq \int_0^n q^x dx \leq S(q^x, P) \\ q \frac{1 - q^n}{1 - q} &\leq \int_0^n q^x dx \leq \frac{1 - q^n}{1 - q} \leq \frac{1}{1 - q} \end{aligned}$$

Lo último puesto que  $0 < q^n < 1 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 - q^n < 1$ .

- d) Luego tenemos que

$$q \frac{1 - q^n}{1 - q} \leq a_n \leq \frac{1}{1 - q}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como  $a_n$  es creciente y acotada superiormente, converge. Por propiedad de las sucesiones, la misma desigualdad es válida en el límite, y tomando en cuenta que  $q^n \rightarrow 0$  se concluye el resultado.

**P2.**

a) Sea  $P \in \mathcal{P}_{a,b}$ . Calculemos las sumas inferior y superior:

$$s\left(\frac{1}{f}, P\right) = \sum_{i=1}^n m_i\left(\frac{1}{f}\right) \Delta x_i \quad S\left(\frac{1}{f}, P\right) = \sum_{i=1}^n M_i\left(\frac{1}{f}\right) \Delta x_i$$

Notemos que:

$$M_i\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{m_i(f)} \quad m_i\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{M_i(f)}$$

Luego tenemos que:

$$S\left(\frac{1}{f}, P\right) - s\left(\frac{1}{f}, P\right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{m_i(f)} - \frac{1}{M_i(f)} \right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{M_i(f) - m_i(f)}{m_i(f)M_i(f)} \Delta x_i$$

Como  $c < f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , tenemos  $(m_i(f)M_i(f))^{-1} < c^{-2}$ . Usando esto:

$$\sum_{i=1}^n \frac{M_i(f) - m_i(f)}{m_i(f)M_i(f)} \Delta x_i < \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f)) \Delta x_i = \frac{1}{c^2} (S(f, P) - s(f, P))$$

Por lo que se concluye el resultado.

b) Veamos que  $\frac{1}{f}$  cumple la condición de Riemann, es decir

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}, \quad S\left(\frac{1}{f}, P\right) - s\left(\frac{1}{f}, P\right) < \varepsilon$$

Usando la parte a), vemos que solo necesitamos que exista  $P$  tal que  $S(f, P) - s(f, P) < c^2 \varepsilon$ . Sea entonces  $\varepsilon > 0$ . Como  $f$  es Riemann-integrable, cumple la condición de Riemann, por lo que para  $c^2 \varepsilon > 0$  existe  $P_0 \in \mathcal{P}_{[a,b]}$  tal que  $S(f, P_0) - s(f, P_0) < c^2 \varepsilon$ . Por la parte a) se tiene entonces:

$$S\left(\frac{1}{f}, P_0\right) - s\left(\frac{1}{f}, P_0\right) < \frac{1}{c^2} (S(f, P_0) - s(f, P_0)) < \frac{1}{c^2} c^2 \varepsilon = \varepsilon$$

Luego basta tomar  $P = P_0$  y se tiene lo pedido.

**P3.**

a) Como  $f$  es no negativa y creciente, no puede tener asíntotas verticales. Además en  $[1, n]$  se cumple:

$$f(1) \leq f(x) \leq f(n), \quad \forall x \in [1, n]$$

Como  $f$  está definida, es monótona y es acotada, es integrable en  $[1, n]$ . Sea entonces la partición  $P = \{x_0 = 1, \dots, x_{n-1} = n\}$  donde  $x_i = i + 1$ ,  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Como  $f$  es creciente,  $M_i(f) = f(x_i) = f(i+1)$  y  $m_i(f) = f(x_{i-1}) = f(i)$ . Además  $\Delta x_i = 1$ . Luego:

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{i=1}^{n-1} M_i(f) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} f(i+1) = \sum_{i=2}^n f(i) \\ s(f, P) &= \sum_{i=1}^{n-1} m_i(f) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} f(i) \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} s(f, P) &\leq \int_1^n f(x) dx \leq S(f, P) \\ \sum_{i=1}^{n-1} f(i) &\leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{i=2}^n f(i) \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

b) Claramente  $f(x) = \ln(x)$  es creciente y no negativa en  $[1, \infty)$ . Usaremos entonces lo visto en a). Veamos primero que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \ln(i) &= \ln \left( \prod_{i=1}^{n-1} i \right) = \ln((n-1)!) \\ \sum_{i=2}^n \ln(i) &= \ln \left( \prod_{i=2}^n i \right) = \ln(n!) \\ \int_1^n \ln(x) dx &= (x \ln(x) - x) \Big|_1^n = n \ln(n) - n + 1 \quad (*) \end{aligned}$$

(\*) Esta integración no es parte de los contenidos de la Semana 7, por eso el apunte les da la solución mediante una indicación, pero la indicación está mala y anoto el resultado correcto.

Ahora juntaremos todo, pero note que la parte a) solamente es válida para  $n \geq 2$ . Debido a su crecimiento, aplicar la función exponencial a nuestras desigualdades no las cambiará.

$$\begin{aligned} \ln((n-1)!) &\leq n \ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!) \\ (n-1)! &\leq e^{n \ln(n) - n + 1} \leq n! \\ (n-1)! &\leq e^{n \ln(n)} e^{-n+1} \leq n! \\ (n-1)! &\leq n^n e^{-n+1} \leq n! \end{aligned}$$

El caso  $n = 1$  se comprueba por simple evaluación obteniendo  $1 \leq 1 \leq 1$ . Con esto demostramos lo pedido  $\forall n \geq 1$ .

**P4.** Pendiente.

**P5.**

- a) Siguiendo la indicación, sea  $P \in \mathcal{P}_{[0,1]}$  con  $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ . Veamos que la función  $f(x) = e^{-x^2}$  es decreciente en  $[0, 1]$ . En efecto, el exponente se hace cada vez más negativo mientras  $x$  crece, con lo que la exponencial decrece. Luego los máximos y los mínimos en cada intervalo de la partición son  $M_i(f) = f(x_{i-1})$  y  $m_i(f) = f(x_i)$ . Además  $\Delta x_i = \frac{1}{2}$ . Luego las sumas inferior y superior son:

$$\begin{aligned} s(f, P) &= \sum_{i=1}^2 m_i(f) \Delta x_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 f(x_i) = \frac{1}{2} (e^{-\frac{1}{4}} + e^{-1}) \\ S(f, P) &= \sum_{i=1}^2 M_i(f) \Delta x_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 f(x_{i-1}) = \frac{1}{2} (e^0 + e^{-\frac{1}{4}}) = \frac{1}{2} (1 + e^{-\frac{1}{4}}) \end{aligned}$$

Recordemos que como son solo dos intervalos debido a la partición,  $[0, \frac{1}{2}]$  y  $[\frac{1}{2}, 1]$ , podemos evaluar las sumatorias directamente.

Como  $h(x) = -x^2$  y  $g(x) = e^x$  son continuas  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (g \circ h)(x)$  también lo es, por lo que  $f(x)$  es integrable y tiene sentido la integral que se pide colocar en la desigualdad. Se sigue finalmente que:

$$\begin{aligned} s(f, P) &\leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq S(f, P) \\ \frac{1}{2} (e^{-\frac{1}{4}} + e^{-1}) &\leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2} (1 + e^{-\frac{1}{4}}) \end{aligned}$$

- b) Usando la indicación, consideremos  $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ ,  $P = \{x_i\}_{i=0}^n$  donde  $x_i = aq^i$ . Como  $x_n = b$ , se tiene

$$x_n = aq^n = b \Rightarrow q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) = \exp\left(\frac{\lambda}{n}\right)$$

Donde se definió la constante  $\lambda = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$  por comodidad en la escritura.

Como  $f(x) = \frac{1}{x}$  es decreciente en  $\mathbb{R}^+$ ,  $M_i\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x_{i-1}}$  y  $m_i\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x_i}$ . Calculando las sumas:

$$\begin{aligned} s(f, P) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{aq^i} (aq^i - aq^{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{q}\right) = n - \frac{n}{q} \\ S(f, P) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i-1}} (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{aq^{i-1}} (aq^i - aq^{i-1}) = \sum_{i=1}^n (q - 1) = nq - n \end{aligned}$$

Sabemos que  $f(x) = \frac{1}{x}$  es continua en  $[a, b]$ ,  $0 < a < b$ , por lo que su integral existe y además cumple la desigualdad:

$$n - \frac{n}{q} \leq \int_a^b \frac{dx}{x} \leq nq - n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Y puesto que  $q = \exp\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ :

$$n - n \exp\left(\frac{-\lambda}{n}\right) \leq \int_a^b \frac{dx}{x} \leq n \exp\left(\frac{\lambda}{n}\right) - n \quad (*)$$

Calculemos los siguientes límites:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} n - n \exp\left(\frac{-\lambda}{n}\right), \quad u = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow n = \frac{\lambda}{u}, \quad u \rightarrow 0 \\
 & = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\lambda}{u} - \frac{\lambda}{u} e^{-u} = \lim_{u \rightarrow 0} \lambda \left( \frac{e^u - 1}{ue^u} \right) = \lambda \lim_{u \rightarrow 0} \left( \frac{e^u - 1}{u} \right) e^{-u} = \lambda \\
 2. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} n \exp\left(\frac{\lambda}{n}\right) - n, \quad u = \frac{\lambda}{n} \\
 & = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\lambda}{u} e^u - \frac{\lambda}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \lambda \left( \frac{e^u - 1}{u} \right) = \lambda
 \end{aligned}$$

Bajo el amparo del Teorema del Sandwich de sucesiones, y ya que en la desigualdad (\*) los límites de los tres términos existen (note que el término central, es decir, la integral, es una constante), tenemos que:

$$\lambda \leq \int_a^b \frac{dx}{x} \leq \lambda$$

De donde se implica claramente que la integral es igual a  $\lambda$ . En otras palabras hemos demostrado que:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lambda = \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln(a).$$

# SOLUCIÓN APUNTE MA1002

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### SEMANA 8

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas  
Use este material con responsabilidad.

**Observación:** Antes del desarrollo probaremos un resultado muy útil. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $u, v$  funciones derivables. Definimos:

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \quad [\text{Notar que el integrando no depende de } x]$$

Entonces aseguramos que se cumple:

$$G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

**Demostración:**

Definamos  $H(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Tenemos por TFC que  $H'(x) = f(x)$ . Luego:

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = \int_c^{v(x)} f(t) dt + \int_{u(x)}^c f(t) dt = \int_c^{v(x)} f(t) dt - \int_c^{u(x)} f(t) dt = H(v(x)) - H(u(x))$$

$$G'(x) = [H(v(x)) - H(u(x))]' = v'(x)H'(v(x)) - u'(x)H'(u(x)) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

Que era lo que se quería probar.

**E1.** Sea  $G(a) = \int_a^{a+p} f(t) dt$ . Lo que nos piden es equivalente a probar que  $G(a)$  no depende del valor de  $a$ . Esto es lo mismo que  $G'(a)$  sea cero. En efecto, notemos que:

$$G'(a) = (a+p)'f(a+p) - a'f(a) = f(a+p) - f(a) = 0$$

Lo último puesto que  $f(a+p) = f(a)$ . Luego  $G(a)$  es constante para todo valor de  $a$ . En particular podemos evaluar en  $a = 0$  y obtener que  $G(a) = G(0)$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ , con lo que se tiene lo pedido.

**E2.**

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)dx &= \int_0^a f(x)dx + \int_{-a}^0 f(x)dx, \quad u = -x \rightarrow du = -dx \\ &= \int_0^a f(x)dx - \int_a^0 f(-u)du = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(-u)du\end{aligned}$$

En resumen, y recordando que las variables del integrando son mudas:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a (f(x) + f(-x))dx$$

**Caso par:** En este caso  $f(-x) = f(x)$  y por lo tanto:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

**Caso impar:** En este caso  $f(-x) = -f(x)$  y por lo tanto:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

**Nota:** Hay que darse cuenta de que las variables son mudas en el integrando. En nuestro caso, lo esencial es que se integra desde 0 hasta  $a$ , sin diferenciar si se escribió  $f(x)dx$  o  $f(u)du$ , ya que las variables se mueven a través del mismo intervalo de integración y por ende solo son etiquetas.

**E3.** Si  $a = b$  el problema no tiene sentido, puesto que el dato de que  $\int_a^b f(x)dx = 0$  no aporta ninguna información. Supongamos entonces que  $a \neq b$ . Como  $f$  es continua en  $[a, b]$ , por el TVM para integrales tenemos que  $\exists \xi \in (a, b)$  tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$$

Pero ya que  $\int_a^b f(x)dx = 0$ , tenemos que  $f(\xi)(b - a) = 0 \Rightarrow f(\xi) = 0$ . Luego basta tomar  $c = \xi$  y se tiene lo pedido.

**E4.**

$$\begin{aligned}& \int_a^b \left( \int_a^b f(x)g(y)dy \right) dx, \quad f(x) \text{ es constante en la integral interior} \\ &= \int_a^b f(x) \left( \int_a^b g(y)dy \right) dx, \quad \int_a^b g(y)dy \text{ es constante en la integral exterior} \\ &= \left( \int_a^b g(y)dy \right) \left( \int_a^b f(x)dx \right).\end{aligned}$$

**E5.**

$$F(x) = \int_0^x x f(t) dt = x \int_0^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = x' \int_0^x f(t) dt + x \left( \int_0^x f(t) dt \right)'$$

Y por el TFC se tiene finalmente:

$$F'(x) = x f(x) + \int_0^x f(t) dt.$$

**E6.**

$$G(x) = \int_0^x \left( \int_0^u f(t) dt \right) du$$

Gracias a que  $f$  es continua, podemos usar el TFC para afirmar que  $(\int_0^u f(t) dt)' = f(u)$ . Luego, integrando por partes  $G(x)$  tenemos:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x \left( \int_0^u f(t) dt \right) du \quad ; \left( \begin{array}{l} p = \int_0^u f(t) dt \rightarrow dp = f(u) du \\ dq = du \rightarrow q = u \end{array} \right) \\ &= u \int_0^u f(t) dt \Big|_0^x - \int_0^x u f(u) du = \int_0^x x f(t) dt - \int_0^x u f(u) du \end{aligned}$$

Recordando que no hay distinción entre  $u$  y  $t$  tenemos:

$$G(x) = \int_0^x x f(u) du - \int_0^x u f(u) du = \int_0^x f(u)(x - u) du.$$

**E7.** En otras palabras, buscamos  $x \in [a, b]$  tal que:

$$\int_a^x f + \int_x^b f = \int_a^x f + \int_a^x f \Leftrightarrow \int_a^b f = 2 \int_a^x f \Leftrightarrow \int_a^b f - 2 \int_a^x f = 0$$

Definiendo  $H(x) = \int_a^b f - 2 \int_a^x f$ , buscamos  $x \in [a, b]$  tal que  $H(x) = 0$ . Notemos que  $H(x)$  es continua puesto que, como  $f$  es integrable, la función  $\int_a^x f$  es continua. Además:

$$H(a) = \int_a^b f \quad \text{y} \quad H(b) = - \int_a^b f$$

Luego:

$$H(a)H(b) \leq 0 \Rightarrow^{TVI} \exists x \in [a, b] : H(x) = 0.$$

Que es lo que se quería probar.

**E8.** Es aplicación directa de la observación inicial. Recuerde que para que la propiedad demostrada en la observación sea válida, la función que se está integrando no debe depender de la variable de la función global (en este caso  $x$ ).

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x) &= \int_1^{x^2} \sin(t^4) dt \Rightarrow f'(x) = 2x \sin(x^8) \\
 \text{(b)} \quad f(x) &= \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{t^2}{1+t^6} dt \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^5}{1+x^{12}} - \frac{\sqrt{x}}{2(1+x^3)} \\
 \text{(c)} \quad f(x) &= \int_{x^3}^{\cos(x)} (x-t) \sin(t^2) dt = x \int_{x^3}^{\cos(x)} \sin(t^2) dt - \int_{x^3}^{\cos(x)} t \sin(t^2) dt \\
 &\Rightarrow f'(x) = \sin(x) \sin(\cos(x^2))(\cos(x) - x) + 3x^2 \sin(x^6)(x^3 - x) + \int_{x^3}^{\cos(x)} \sin(t^2) dt.
 \end{aligned}$$

**E9.** Me parece que el ejercicio debería pedir *Muestre que*  $f'''(x) = 2f(x)$ . Si es así, entonces procedamos a derivar por TFC.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt = x^2 \int_0^x f(t) dt - 2x \int_0^x t f(t) dt + \int_0^x t^2 f(t) dt \\
 f'(x) &= 2x \int_0^x f(t) dt + x^2 f(x) - 2 \int_0^x t f(t) dt - 2x^2 f(x) + x^2 f(x) = 2x \int_0^x f(t) dt - 2 \int_0^x t f(t) dt \\
 f''(x) &= 2 \int_0^x f(t) dt + 2x f(x) - 2x f(x) = 2 \int_0^x f(t) dt \\
 f'''(x) &= 2f(x)
 \end{aligned}$$

**P1.**

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$$

$$\Rightarrow g'(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{TFC}} + \underbrace{f'(x)f^{-1}(f(x))}_{\text{Observación inicial}} = f(x) + xf'(x)$$

Como  $(xf(x))' = f(x) + xf'(x)$ , se tiene por propiedad de primitivas que  $g(x) - xf(x) = c$ , con  $c$  una constante real. Luego  $g(x) = xf(x) + c$ . Evaluando en  $x = 0$  tenemos  $g(0) = c$ , pero sabemos que:

$$g(0) = c = \int_0^0 f(t)dt + \int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt = \int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt$$

Solo nos basta saber cuánto vale  $f(0)$ . El enunciado nos dice que

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty); \quad \text{biyectiva y derivable (y por ende continua) en } (0, \infty)$$

Ello basta para conocer el valor de  $f(0)$ .

Que  $f$  sea biyectiva (particularmente inyectiva) y continua nos dice que  $f$  es estrictamente monótona. Una demostración formal podría ser (\*), que se muestra más abajo. Pero usemos ideas más intuitivas para entender. Si la función creciera (o decreciera) en un momento y luego se "devolviera", y todo en una línea continua, claramente la función tendrá que repetir valores en su camino de vuelta, lo que contradice la inyectividad.

Dicho esto, y suponiendo que  $f(0) \neq 0$ , si  $f$  siempre creciera entonces nunca podrá tomar el valor 0. En cambio, si siempre decreciera, nunca podrá tomar los valores mayores a  $f(0)$ . Ambos casos contradicen la sobreyectividad de  $f$  en  $[0, \infty)$ . Luego necesariamente  $f(0) = 0$ . Usando esto concluimos que

$$c = \int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt = \int_0^0 f^{-1}(t)dt = 0 \Rightarrow g(x) = xf(x)$$

.

(\*) Veamos primero que en un intervalo  $[a, b]$ ,  $a < b$ , no puede ocurrir que exista una monotonía local **no estricta**. En efecto,

$$f(x_1) \leq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \vee \underbrace{f(x_1) = f(x_2)}_{\text{Inyectividad!}}$$

Ahora, supongamos que tenemos un intervalo  $[a, b]$ ,  $a < b$  en donde  $f$  cambia su crecimiento en algún  $x = p$ ,  $p \in (a, b)$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que primero crece y luego decrece estrictamente. Es decir:

$$f(a) < f(p) \wedge f(b) < f(p)$$

Tomando  $\lambda = \max\{f(a), f(b)\}$ , es claro que

$$f(a) \leq \lambda < f(p) \wedge f(b) \leq \lambda < f(p)$$

Luego, por TVI en  $[a, p]$  y  $(p, b]$  tenemos que  $\exists \bar{x}_1 \in [a, p) \wedge \bar{x}_2 \in (p, b]$  tales que:

$$f(\bar{x}_1) = \lambda \wedge f(\bar{x}_2) = \lambda$$

Puesto que es claro que  $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$  (ya que  $[a, p) \cap (p, b] = \emptyset$ ), tenemos que la inyectividad de  $f$  se contradice, por lo que  $f$  nunca cambia de crecimiento.

**P2.**

a)

$$g(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{t} dt, \text{ con } g'(x) = \frac{\arctan(x)}{x} \text{ por TFC.}$$

Integrando por partes tenemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 g(x) dx \quad ; \left[ \begin{array}{l} p = g(x) \rightarrow dp = \frac{\arctan(x)}{x} dx \\ dq = dx \rightarrow q = x \end{array} \right] \\ &= xg(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \arctan x dx = g(1) - \int_0^1 \arctan x dx \end{aligned}$$

Recuerde que en este caso no hay importancia si se etiqueta la integral con  $x$  o con  $t$ .

b) Hay que calcular  $\int_0^1 \arctan x dx$ . Para ello integremos por partes:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \arctan(x) dx \quad ; \left[ \begin{array}{l} p = \arctan(x) \rightarrow dp = \frac{dx}{1+x^2} \\ dq = dx \rightarrow q = x \end{array} \right] \\ &= x \arctan(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} \\ &= x \arctan(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 \\ &= \arctan(1) - \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

Con lo que se tiene:

$$\int_0^1 g(x) dx = g(1) - \int_0^1 \arctan x dx = g(1) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2)$$

**P3.**

$$g(x) = f(x) + \int_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(x)) dx \quad (4)$$

a) Para esta parte, demostraremos mejor que  $\tanh^{-1}(f(x)) = g(x)$ , puesto que la derivada de  $\tanh^{-1}(x)$  no contiene funciones hiperbólicas (en cambio, la de  $\tanh(x)$  sí). En efecto, recuerde primero que:

$$(\cosh(x))' = \sinh(x) \wedge (\sinh(x))' = \cosh(x)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \Rightarrow 1 - \tanh^2(x) = \cosh^{-2}(x)$$

Ambas igualdades que se obtienen simplemente con la definición del coseno y seno hiperbólico. Veamos ahora que las derivadas mencionadas valen:

$$\begin{aligned} (\tanh(x))' &= \left( \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right)' = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \cosh^{-2}(x) \\ (\tanh^{-1}(x))' &= \frac{1}{\tanh'(\tanh^{-1}(x))} = \frac{1}{\cosh^{-2}(\tanh^{-1}(x))} = \frac{1}{1 - \tanh^2(\tanh^{-1}(x))} = \frac{1}{1 - x^2} \end{aligned}$$

Como  $g(x)$  es biyectiva y continua, es estrictamente monótona (demostrado en [P1]). Luego  $g^{-1}(x)$  es continua por propiedad del apunte acerca de la continuidad de las funciones inversas. Como  $f(x)$  es diferenciable, se tiene que es continua y  $f^2(g^{-1}(x))$ , por ser composición de funciones continuas, es continua. Luego podemos usar el TFC para derivar  $g'(x)$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= g'(x)f^2(g^{-1}(g(x))) + f'(x) = g'(x)f^2(x) + f'(x) \\ \Rightarrow g'(x) &= \frac{f'(x)}{1 - f^2(x)} \end{aligned}$$

Veamos por otra parte que:

$$(\tanh^{-1}(f(x)))' = \frac{f'(x)}{1 - f^2(x)}$$

Luego  $g(x)$  y  $\tanh^{-1}(f(x))$  son primitivas de la misma función y por ende difieren en  $c \in \mathbb{R}$ . Es decir  $g(x) - \tanh^{-1}(f(x)) = c$ . Evaluaremos en  $x = 0$  esta igualdad puesto que es el único punto en que tenemos información. Sabemos que  $g(0) = 0$ . Pero además:

$$g(0) = f(0) + \int_0^{g(0)} f^2(g^{-1}(x))dx = f(0) + 0 = f(0)$$

Por lo que se tiene que  $f(0) = 0$  también.

Luego evaluando en  $x = 0$  tenemos que  $c = g(0) - \tanh^{-1}(f(0)) = 0 - \tanh^{-1}(0) = 0$  y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \tanh^{-1}(f(x)) &= g(x) & / \quad \tanh( ) \\ \Rightarrow f(x) &= \tanh(g(x)) \end{aligned}$$

- b) Usando la indicación tenemos que  $\tanh^2(t) = f^2(g^{-1}(t))$ . Notemos entonces que si  $g(x) = x^3$ , podríamos usar que:

$$\int_0^{x^3} \tanh^2(t)dt = \int_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(t))dt$$

Y despejarla de la igualdad (1). Lo único que nos pide  $g(x)$  es que vaya de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , sea biyectiva, diferenciable y tal que  $g(0) = 0$ . Es fácil ver que  $x^3$  cumple todas esas condiciones. Luego podemos hacer  $g(x) = x^3$  y al despejar la integral en (1) tendremos:

$$\int_0^{x^3} \tanh^2(t)dt = g(x) - f(x) = g(x) - \tanh(g(x)) = x^3 - \tanh(x^3)$$

**P4.**

$$f(x) := \int_0^x x \ln(tx) dt, \text{ definida en } (0, \infty)$$

a)

$$\begin{aligned} & \int \ln(t) dt \quad ; \left[ \begin{array}{l} u = \ln(t) \rightarrow du = \frac{dt}{t} \\ dv = dt \rightarrow v = t \end{array} \right] \\ &= t \ln(t) - \int dt = t \ln(t) - t + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_1^2 2 \ln(2t) dt \quad ; w = 2t \rightarrow dw = 2dt \\ f(2) &= \int_2^4 \ln(w) dw = (w \ln(w) - w) \Big|_2^4 = 4 \ln(4) - 4 - 2 \ln(2) + 2 \\ f(2) &= 6 \ln(2) - 2 \end{aligned}$$

b) Notemos que no podemos usar el TFC directamente para derivar  $f(x)$  puesto que tenemos  $\ln(tx)dt$  en el integrando (depende de  $x$ ). Haciendo  $u = tx \rightarrow du = xdt$ , tenemos:

$$f(x) = \int_1^x x \ln(tx) dt = \int_x^{x^2} \ln(u) du$$

Luego podemos derivar (mediante la **observación inicial**) para obtener:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' \ln(x^2) - x' \ln(x) \\ &= 2x \ln(x^2) - \ln(x) \\ &= 4x \ln(x) - \ln(x) = (4x - 1) \ln(x) \end{aligned}$$

**P5.** Con  $g(t) = \arcsen(\arctan(t))$  continua en  $[0, \tan(1)]$ , tenemos claramente que es continua en cada intervalo  $[0, \tan(x)]$  con  $x \in [0, 1]$ . Luego, podemos estar tranquilos al utilizar la observación inicial para derivar  $f(x)$ .

$$f'(x) = \left( \int_0^{\tan(x)} g(t) dt \right)' = \tan'(x) g(\tan(x)) - 0' g(0) = \sec^2(x) g(\tan(x)) = \sec^2(x) \arcsen(x)$$

**P6.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada e integrable.  $f(a + b - x) = f(x)$

a)

$$\begin{aligned} & \int_a^b x f(x) dx \quad ; u = a + b - x \rightarrow du = -dx \\ &= - \int_b^a (a + b - u) f(a + b - u) du = \int_a^b (a + b - u) f(u) du \\ &= (a + b) \int_a^b f(u) du - \underbrace{\int_a^b u f(u) du}_{\text{La misma del inicio}} \\ &\Rightarrow 2 \int_a^b x f(x) dx = (a + b) \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b x f(x) dx = \frac{a + b}{2} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

b) Se debe notar que lo que se pide es calcado de lo demostrado anteriormente si usáramos  $g(\sin(x))$  en lugar de  $f(x)$  y el intervalo  $[0, \pi]$  en lugar de  $[a, b]$ . Veamos si podemos hacer esto.

Como  $g$  es continua en  $[-1, 1]$ , al igual que  $\sin(x)$ ,  $g(\sin(x))$  también lo es. Además esta función está bien definida en todo  $\mathbb{R}$  puesto que  $\sin(x)$  solo da valores en  $[-1, 1]$ . Luego consideremos el intervalo cerrado  $[0, \pi]$ , en donde  $g(\sin(x))$  por ser continua es acotada e integrable. Notemos además que:

$$g(\sin(0 + \pi - x)) = g(\sin(x))$$

Como  $g(\sin(x))$  cumple todas las gracias de  $f(x)$ , basta considerar la integral como un caso particular de lo visto en (a) con  $f(x) = g(\sin(x))$ ,  $a = 0$ ,  $b = \pi$ .

c) Para poder usar la parte (b), necesitamos encontrar  $g(x)$  tal que:

$$xg(\sin(x)) = \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} = x \frac{\sin(x)}{2 - \sin^2(x)}$$

Es directo definir  $g(x) = \frac{x}{2-x^2}$ , que cumple con ser continua en  $[-1, 1]$ . Luego tenemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \int_0^\pi xg(\sin(x)) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi g(\sin(x)) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx \quad ; u = \cos(x) \rightarrow du = -\sin(x) dx \\ &= \frac{-\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + u^2} du \end{aligned}$$

Esta última integral es bien conocida y vale:

$$\frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} \arctan(x) \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi^2}{4}$$

# SOLUCIÓN APUNTE MA1002

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### SEMANA 9

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas  
Use este material con responsabilidad.

**Nota:** El área del manto del sólido de revolución producido por la rotación de una curva  $f(x)$  en torno al eje  $OX$  entre  $a$  y  $b$  está dado por:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_a^b f \sqrt{1 + f'^2}$$

En cambio, si se rota en torno al eje  $OY$ , el área está dado por:

$$A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'^2}$$

*Esto es Semana 10 pero por alguna razón misteriosa lo preguntan acá.* Otras fórmulas útiles, que son de la semana 9, son:

$$A_a^b(R) = \int_a^b |f| \quad V_{OX} = \pi \int_a^b f^2 \quad V_{OY} = 2\pi \int_a^b x f$$

#### E1.

a)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

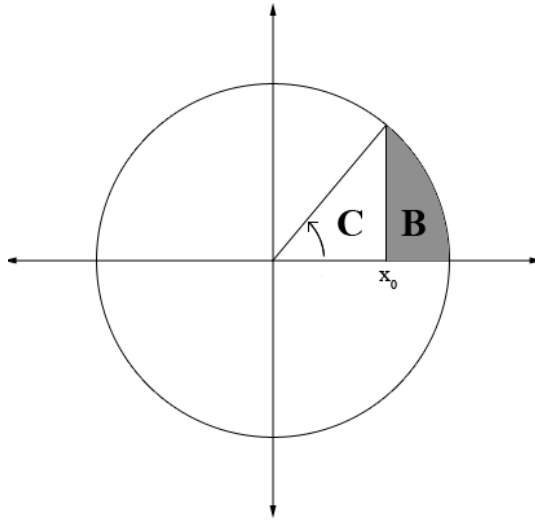
Luego el área de la elipse es la comprendida entre  $y_+$  y  $y_-$ . Notemos que, por la simetría de la elipse, basta calcular el área bajo la curva de  $y_+$  entre 0 y  $a$  para obtener exactamente un cuarto del área pedida. Es decir,

$$A = 4 \int_0^a |y_+| dx = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

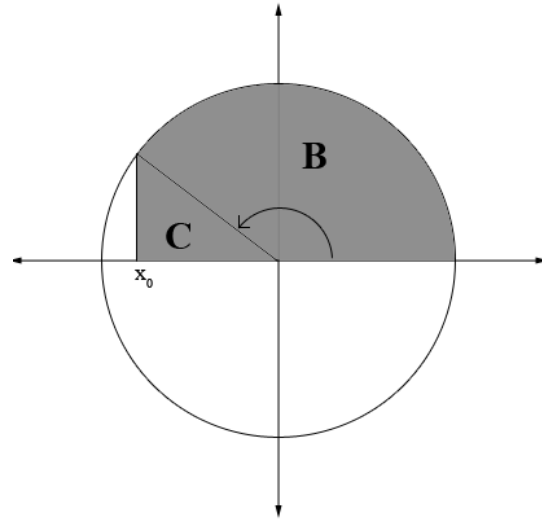
Haciendo  $x = a \sin(v) \rightarrow dx = a \cos(v) dv$ ;  $v = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ , tenemos:

$$\begin{aligned} A &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(v) dv \\ &= 2ab(v + \sin(v) \cos(v)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi \end{aligned}$$

- b) Si nos restringimos a los primeros dos cuadrantes, el área del sector circular lo obtenemos integrando el círculo desde  $x_0 = R \cos(\alpha)$  hasta  $R$  (área B, pintada en gris) y sumando la integral del rayo del ángulo  $\alpha$  desde 0 hasta  $x_0$  (área C). Notemos que esta segunda integral se hace negativa en el segundo cuadrante (puesto que en este caso  $x_0 < 0$ ), por lo que es consistente con lo que queremos.



$\alpha$  en el I cuadrante



$\alpha$  en el II cuadrante

Luego, teniendo en cuenta que el rayo del ángulo  $\alpha$  es  $y = x \tan(\alpha)$ ,

$$\begin{aligned}
 A_\alpha &= \int_0^{x_0} x \tan(\alpha) + \int_{x_0}^R \sqrt{R^2 - x^2} \quad ; x = R \cos(v) \rightarrow dx = -R \sin(v) dv \\
 A_\alpha &= \tan(\alpha) \frac{x^2}{2} \Big|_0^{R \cos(\alpha)} - R^2 \int_\alpha^0 \sin^2(v) dv \\
 A_\alpha &= \tan(\alpha) \frac{R^2 \cos^2(\alpha)}{2} + \frac{R^2}{2} (v - \sin(v) \cos(v)) \Big|_0^\alpha \\
 A_\alpha &= \frac{1}{2} R^2 \alpha
 \end{aligned}$$

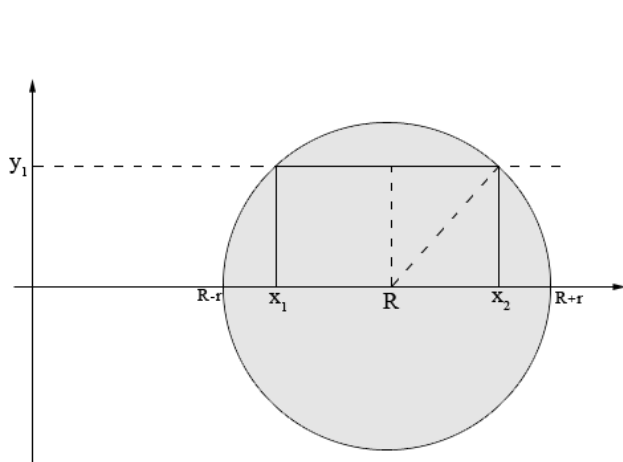
Es fácil extrapolar el resultado al tercer y cuarto cuadrante considerando que podemos usar

$$\alpha = \pi + (\alpha - \pi)$$

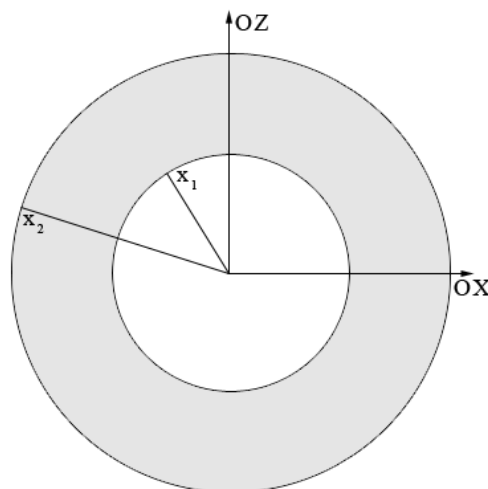
Donde claramente  $(\alpha - \pi)$  es un ángulo del primer o segundo cuadrante. Como en estos casos el área del sector circular se puede calcular como la suma del sector circular de esos dos ángulos, tenemos:

$$A_\alpha = A_\pi + A_{\alpha-\pi} = \frac{1}{2} R^2 \pi + \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \pi) = \frac{1}{2} R^2 \alpha$$

**E2.**



Corte en el plano  $XY$



Corte en  $y = y_1$  visto desde arriba

Consideremos el método del disco en torno a  $OY$ . El toro de revolución en  $y_1$  tiene un área transversal  $A(y_1) = \pi(x_2^2 - x_1^2)$ . En la primera figura se ve que  $|R - x_1| = |R - x_2| = \lambda$ , donde  $\lambda$  se calcula con pitágoras,

$$\lambda^2 + y_1^2 = r^2 \Rightarrow \lambda = \sqrt{r^2 - y_1^2}$$

Luego  $x_1 = R - \sqrt{r^2 - y_1^2}$ ,  $x_2 = R + \sqrt{r^2 - y_1^2}$  y

$$A(y_1) = \pi((R - \sqrt{r^2 - y_1^2})^2 - (R + \sqrt{r^2 - y_1^2})^2) = 4\pi R \sqrt{r^2 - y_1^2}$$

Luego el volumen lo encontramos integrando  $y_1$  desde  $-r$  a  $r$ . Por la simetría de la figura podemos simplemente integrar desde 0 hasta  $r$  y obtendremos la mitad del volumen. Es decir,

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^r 4\pi R \sqrt{r^2 - y^2} dy \quad ; y = r \sin(v) \rightarrow dy = r \cos(v) dv \\ &= 8\pi R r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(v) dv = 4\pi R r^2 (v + \sin(v) \cos(v)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 R r^2 \end{aligned}$$

**E3.**

$$y_1 = \frac{x^2}{3} \quad y_2 = 4 - \frac{2x^2}{3}$$

Las funciones se intersectan en  $x = \pm 2$ , por lo que el área buscada es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 |y_1 - y_2| dx = \int_{-2}^2 |x^2 - 4| dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx \\ &= \left( 4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

**E4.** Es directo de ocupar la fórmula mostrada al inicio.

$$A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Donde  $f'(x) = x$ . Luego:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + x^2} dx && ; u = 1 + x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ &= \pi \int_1^2 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2\pi}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 \\ &= \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

**E5.** Llevemos la rotación en torno a  $y = -1$  a una en torno al eje  $OX$ . Para ello cada función debe trasladarse  $+1$  verticalmente. Luego la región estará acotada por:

$$y_1 = 5 - x^2 \qquad y_2 = 4$$

Usaremos el método del disco para estas dos funciones:

$$V = \pi \int_a^b |y_2^2 - y_1^2| dx$$

Determinar  $a$  y  $b$  es trivial, dando como resultado  $a = -1$  y  $b = 1$ .

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 |(5 - x^2)^2 - 4^2| dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 |(9 - x^2)(1 - x^2)| dx && , \text{ y como } (9 - x^2)(1 - x^2) \geq 0 \text{ en } [-1, 1], \\ &= \pi \int_{-1}^1 (9 - x^2)(1 - x^2) dx = \pi \int_{-1}^1 (x^4 - 10x^2 + 9) dx \\ &= \pi \left( \frac{x^5}{5} - \frac{10x^3}{3} + 9x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{176\pi}{15} \end{aligned}$$

**P1.**

a)

$$(1+x^2)y^2 = x^2(1-x^2)$$

En la ecuación se ve que necesariamente el lado derecho es no negativo, ya que el lado izquierdo lo es. Luego  $x \in [-1, 1]$ . Además, como ambas variables  $x$  e  $y$  están al cuadrado, se deduce que la curva es simétrica respecto a los dos ejes. Luego, basta con multiplicar por 4 el área del primer cuadrante. En este cuadrante tenemos la función:

$$y_+ = x \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

Por lo que el área buscada corresponde a:

$$A = 4 \int_0^1 x \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} dx$$

En un intento por hacer que la expresión al interior de la raíz sea un cuadrado perfecto, hagamos

$$v^2 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Y calculando el diferencial

$$(*) \quad 2v dv = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} dx$$

Pero

$$\begin{aligned} v^2 + 1 &= \frac{1-x^2}{1+x^2} + 1 \\ v^2 + 1 &= \frac{2}{1+x^2} \quad / ( )^2 \\ (v^2 + 1)^2 &= \frac{4}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Por lo que reemplazando en (\*) tenemos

$$\begin{aligned} 2v dv &= \frac{-4x}{(1+x^2)^2} dx \\ 2v dv &= -(v^2 + 1)^2 x dx \\ \frac{-2v}{(v^2 + 1)^2} dv &= x dx \end{aligned}$$

Y como  $v(0) = 1$  y  $v(1) = 0$ , la integral nos queda:

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^1 x \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} dx \\ &= 4 \int_1^0 \frac{-2v}{(v^2 + 1)^2} v dv \\ &= 4 \int_1^0 \left( \frac{1}{v^2 + 1} \right)' v dv \quad ; \left[ \begin{array}{l} p = v \rightarrow dp = dv \\ dq = \left( \frac{1}{v^2 + 1} \right)' dv \rightarrow q = \frac{1}{v^2 + 1} \end{array} \right] \\ &= 4 \left( \frac{v}{1+v^2} \Big|_1^0 - \int_1^0 \frac{dv}{1+v^2} \right) \\ &= 4 \left( \frac{v}{1+v^2} \Big|_1^0 - \arctan(v) \Big|_1^0 \right) = \pi - 2 \end{aligned}$$

- b) Como el conjunto de puntos es simétrico respecto al eje  $OX$ , basta rotar  $y_+$  para obtener el volumen.  
Luego

$$V = \pi \int_{-1}^1 (y_+)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 x^2 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx = \pi \int_{-1}^1 \frac{x^2 - x^4}{1+x^2} dx$$

Notemos que  $x^2 - x^4 = (1+x^2) + (1-x^4) - 2 = (1+x^2) + (1-x^2)(1+x^2) - 2 = (1+x^2)(2-x^2) - 2$ , por lo que podemos hacer:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 \frac{(1+x^2)(2-x^2) - 2}{1+x^2} dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 \left( 2 - x^2 - \frac{2}{1+x^2} \right) dx \\ &= \pi \left( 2x - \frac{x^3}{3} - 2 \arctan(x) \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{10\pi}{3} - \pi^2 \end{aligned}$$

**P2.**

- a)  $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \quad , u = 1-x^2 \rightarrow du = -2x dx \\ &= - \int_1^0 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{2} du = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- b) Usamos el método del disco

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x\sqrt{1-x^2})^2 dx = \pi \int_0^1 x^2(1-x^2) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \\ &= \pi \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{15} \end{aligned}$$

**P3.**

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} \quad ; x \text{ se mueve en } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

Recordemos que el área del manto por una rotación  $OX$  está dada por:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Para el caso de la elipse, dada su simetría, basta rotar  $y_+$ .

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-2x^2}} \rightarrow 1 + (f'(x))^2 = \frac{4-x^2}{4-2x^2}$$

Luego tenemos que:

$$A = \pi \int_{-1}^1 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} \sqrt{\frac{4 - x^2}{4 - 2x^2}} = \pi \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{4 - 2x^2} \sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4 - 2x^2}}$$

Pero como  $x \in [-1, 1]$ ,  $\sqrt{4 - 2x^2} \neq 0$  y por lo tanto:

$$\begin{aligned} A &= \pi \int_{-1}^1 \sqrt{4 - x^2} dx = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx, u = \frac{x}{2} \rightarrow du = \frac{dx}{2} \\ &= 4\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - u^2} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) \quad &\int \sqrt{1 - x^2} dx, x = \sin(v) \rightarrow dx = \cos(v) dv; v = \arcsen(x) \\ &= \int \cos^2(v) dv = \frac{1}{2}(v + \sin(v) \cos(v)) + c = \frac{1}{2}(\arcsen(x) + x\sqrt{1 - x^2}) + c \end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$A = 4\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - u^2} du = 2\pi(\arcsen(u) + u\sqrt{1 - u^2}) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \pi\sqrt{3} + \frac{2\pi^2}{3}$$

**P4.**  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  y  $g(x) = \sqrt{3} - \sqrt{1 - x^2}$

a)

$$A = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^1 |2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{3}| dx$$

El término encerrado en valor absoluto se anula en  $x = \pm \frac{1}{2}$ , por lo que:

- $x \in [-1, -\frac{1}{2}]$ ,  $|2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 2\sqrt{1 - x^2}$
- $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ,  $|2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{3}| = 2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{3}$
- $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ ,  $|2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 2\sqrt{1 - x^2}$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (\sqrt{3} - 2\sqrt{1 - x^2}) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{3}) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (\sqrt{3} - 2\sqrt{1 - x^2}) dx \\ &= x\sqrt{3} \Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} - 2 \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx + 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx - x\sqrt{3} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + x\sqrt{3} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 - x^2} dx \\ &= -2 \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx + 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx - 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 - x^2} dx \quad (\text{Calculado en P3}) \\ &= -(\arcsen(x) + x\sqrt{1 - x^2}) \Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} + (\arcsen(x) + x\sqrt{1 - x^2}) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - (\arcsen(x) + x\sqrt{1 - x^2}) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

b)  $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

Del análisis de signo del valor absoluto de la parte a), podemos obtener que:

- $x \in [-1, \frac{-1}{2}]$ ,  $h(x) = f(x)$
- $x \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ ,  $h(x) = g(x)$
- $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ ,  $h(x) = f(x)$

Luego,

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-1}^1 h^2(x) dx = \pi \int_{-1}^{\frac{-1}{2}} f^2(x) dx + \pi \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} g^2(x) dx + \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x) dx \\
 &= \pi \int_{-1}^{\frac{-1}{2}} (1-x^2)(x) dx + \pi \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} (4-x^2-2\sqrt{3}\sqrt{1-x^2})(x) dx + \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2)(x) dx \\
 &= \pi \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{\frac{-1}{2}} + \pi \left( 4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \pi \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - 2\pi\sqrt{3} \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx \\
 &= \frac{13\pi}{3} - 2\pi\sqrt{3} \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx \quad (\text{Calculado en P3}) \\
 &= \frac{13\pi}{3} - \pi\sqrt{3}(\arcsen(x) + x\sqrt{1-x^2}) \Big|_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{17\pi}{6}(1-2\pi\sqrt{3})
 \end{aligned}$$

### P5.

a) El caso  $a = 0$  es trivial. La recta que pasa por  $P_0$  y  $P$ , con  $a > 0$ , es:

$$y_1 = 1 + \frac{f(a) - 1}{a}$$

Luego el área buscada es:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^a (f(x) - y_1) dx = \int_0^a \left( f(x) + \frac{1-f(a)}{a} - 1 \right) dx \\
 &= \frac{1}{a} \left( a \int_0^a f(x) dx + (1-f(a)) \int_0^a x dx - a \int_0^a dx \right) \\
 &= \frac{1}{a} \left( a \int_0^a (-6x^2 + 5x + 1) dx + (6a^2 - 5a) \frac{x^2}{2} \Big|_0^a - ax \Big|_0^a \right) \\
 &= \frac{1}{a} \left( a \left( -2x^3 + \frac{5x^2}{2} + x \right) \Big|_0^a + (6a^2 - 5a) \frac{a^2}{2} - a^2 \right) \\
 &= \left( -2a^3 + \frac{5a^2}{2} + a + 3a^3 - \frac{5a^2}{2} - a \right) \\
 &= a^3
 \end{aligned}$$

b) Las curvas se intersectan en 0 y  $m$ , por lo que:

$$V_{OX} = \pi \int_0^m (m^2 x^2 - x^4) dx \qquad V_{OY} = 2\pi \int_0^m x(mx - x^2) dx$$

Luego ambos volúmenes son iguales si:

$$\begin{aligned} \int_0^m (m^2 x^2 - x^4) dx &= 2 \int_0^m x(mx - x^2) dx \\ \left( \frac{1}{3} m^2 x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^m &= 2 \left( \frac{1}{3} m x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^m \\ \frac{1}{3} m^5 - \frac{1}{5} m^5 &= \frac{2}{3} m^4 - \frac{1}{2} m^4 \\ m^4 \left( \frac{2}{15} m - \frac{1}{6} \right) &= 0 \end{aligned}$$

La solución  $m > 0$  corresponde a:

$$\frac{2}{15} m - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow m = \frac{15}{12}$$

# SOLUCIÓN APUNTE MA1002

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### SEMANA 10

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas  
Use este material con responsabilidad.

**Nota:** La longitud de la curva  $f(x)$  entre 0 y  $x$  está dada por:

$$L_0^x(f) = \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

La longitud de una curva parametrizada por  $\vec{r}(t)$  entre  $a$  y  $b$  corresponde a (contenido de Semana 11):

$$L_a^b = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt$$

Recuerde que los momentos estáticos  $M_{OX}$  y  $M_{OY}$  respecto a los ejes  $OX$  y  $OY$  respectivamente de una región de masa  $m$  encerrada bajo el gráfico de una función  $f(x)$  entre  $x = a$  y  $x = b$  corresponden a:

$$\begin{aligned} M_{OX} &= Y_G \cdot m \\ M_{OY} &= X_G \cdot m \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} X_G &= \frac{1}{2\pi} \frac{V_{OY}(f)_a^b}{A_a^b(f)} \\ Y_G &= \frac{1}{2\pi} \frac{V_{OX}(f)_a^b}{A_a^b(f)} \end{aligned}$$

corresponden a las coordenadas del Centro de Gravedad.

### P1.

a) Sabemos por enunciado que:

$$\begin{aligned} L_0^x(f) &= x^2 + 2x - f(x) \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} L_0^x(f) &= 2x + 2 - f'(x) \end{aligned}$$

Por otra parte, derivando la fórmula para la longitud de la curva obtenemos, usando el TFC:

$$\frac{d}{dx} L_0^x(f) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

Por lo que igualando obtenemos:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+f'(x)^2} &= 2x+2-f'(x) & / \quad ( )^2 \\ 1+f'(x)^2 &= (4x^2+8x+4) - 2(2x+2)f'(x) + f'(x)^2 \\ f'(x) &= \frac{4x^2+8x+3}{4(x+1)} & / \quad \int ( ) dx \\ f(x) &= \int \frac{4x^2+8x+3}{4(x+1)} dx\end{aligned}$$

Calculemos esta primitiva:

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2+8x+3}{4(x+1)} dx &= \int \frac{4(x+1)^2-1}{4(x+1)} dx = \int \left( x+1 - \frac{1}{4(x+1)} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}\ln(x+1) + c\end{aligned}$$

Luego  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}\ln(x+1) + c$ , pero  $f(0) = 0$  por lo que evaluando podemos encontrar el valor de la constante  $c$ .

$$f(0) = \frac{1}{2}0^2 + 0 - \frac{1}{4}\ln(0+1) + c = c = 0 \Rightarrow c = 0$$

Con lo que:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}\ln(x+1) = \frac{1}{2}x(x+2) - \frac{1}{4}\ln(x+1)$$

b) Área bajo la curva:

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}\ln(x+1) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x dx - \frac{1}{4} \int_0^1 \ln(x+1) dx \\ &= \left( \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}((x+1)\ln(x+1) - (x+1)) \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{11 - 6\ln(2)}{12}\end{aligned}$$

Longitud entre 0 y 1: Por enunciado, la longitud entre 0 y  $x$  es  $x^2 + 2x - f(x)$ . Luego basta calcular haciendo  $x = 1$ .

$$L_0^1(f) = 1 + 2 - f(1) = 3 - \left( \frac{1}{2}1^2 + 1 - \frac{1}{4}\ln(1+1) \right) = \frac{6 + \ln(2)}{4}$$

**P2.** Recuerde que se tiene, para una parametrización  $\vec{r}(t)$ :

$$L_a^b = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt$$

a) Tenemos que nuestra parametrización es:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos(t) \\ e^{2t} \sin(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 2e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 2\cos(t) - \sin(t) \\ 2\sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$$

Y calculando su norma:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| &= e^{2t} \sqrt{(2\cos(t) - \sin(t))^2 + (2\sin(t) + \cos(t))^2} \\ &= e^{2t} \sqrt{5(\sin^2(t) + \cos^2(t))} = e^{2t} \sqrt{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$L_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} e^{2t} \sqrt{5} dt = \frac{e^{2t} \sqrt{5}}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{5}}{2} (e^{4\pi} - 1)$$

b)

$$L_0^{t_0} = \int_0^{t_0} e^{2t} \sqrt{5} dt = \frac{e^{2t} \sqrt{5}}{2} \Big|_0^{t_0} = \frac{\sqrt{5}}{2} (e^{2t_0} - 1)$$

Necesitamos que  $2L_0^{t_0} = L_0^{2\pi}$ . Esto es lo mismo que pedir:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\sqrt{5}}{2} (e^{2t_0} - 1) &= \frac{\sqrt{5}}{2} (e^{4\pi} - 1) \\ 2e^{2t_0} - 2 &= e^{4\pi} - 1 \\ e^{t_0} &= \sqrt{\frac{e^{4\pi} + 1}{2}} \\ t_0 &= \ln \sqrt{\frac{e^{4\pi} + 1}{2}} \end{aligned}$$

**P3.** Despejando para el primer cuadrante obtenemos:

$$y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$$

Con lo que:

$$y' = \frac{3}{2}(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2} \cdot \left( \frac{-2}{3}x^{-1/3} \right) = -x^{-1/3}(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}$$

$$1 + (y')^2 = 1 + x^{-2/3}(a^{2/3} - x^{2/3}) = 1 + \frac{a^{2/3}}{x^{2/3}} - 1 = \left( \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} \right)^2$$

En el primer cuadrante ( $x \geq 0$ ), la curva corta al eje  $OX$  en  $x = a$  (se despeja haciendo  $y = 0$ ), y corta al eje  $OY$  en  $y = a$  (se despeja haciendo  $x = 0$ ). Lo importante de este resultado es que la curva cuya longitud nos piden calcular va desde el punto  $(0, a)$  hasta el punto  $(a, 0)$ . Luego la integral de la longitud se calcula desde 0 hasta  $a$ , es decir:

$$L_0^a(C) = \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^a \sqrt{\left( \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} \right)^2} dx = \int_0^a \left| \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} \right| dx$$

Pero como  $a, x > 0$ , tenemos finalmente que:

$$L_0^a(C) = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} dx = a^{1/3} \int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}}$$

**P4.** Para el largo de la elipse, debido a su simetría, consideraremos el doble del largo de la curva sobre el eje  $OX$ , de ecuación  $y = \sqrt{2}\sqrt{1-x^2}$ . Donde:

$$y' = \frac{-x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} \quad 1 + (y')^2 = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

Por lo tanto la longitud de la elipse está dada por:

$$E = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} dx$$

Análogamente, por su simetría, para el largo de la senoide consideraremos el doble del largo de la curva sobre el eje  $OX$ , esto es, entre 0 y  $\pi$ . Además:

$$y' = \cos(x) \quad 1 + (y')^2 = 1 + \cos^2(x)$$

Por lo tanto la longitud de la senoide está dada por:

$$S = 2 \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx, \quad u = \cos(x) \rightarrow du = -\sin(x)dx = -\sqrt{1-u^2}dx$$

$$= -2 \int_1^{-1} \frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}} du = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+u^2}{1-u^2}} du$$

Por lo que  $E = S$ .

# SOLUCIÓN APUNTE MA1002

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### SEMANA 11

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas  
Use este material con responsabilidad.

**P1.**  $\rho(\theta) = a(1 - \cos(\theta))$  ,  $a > 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$

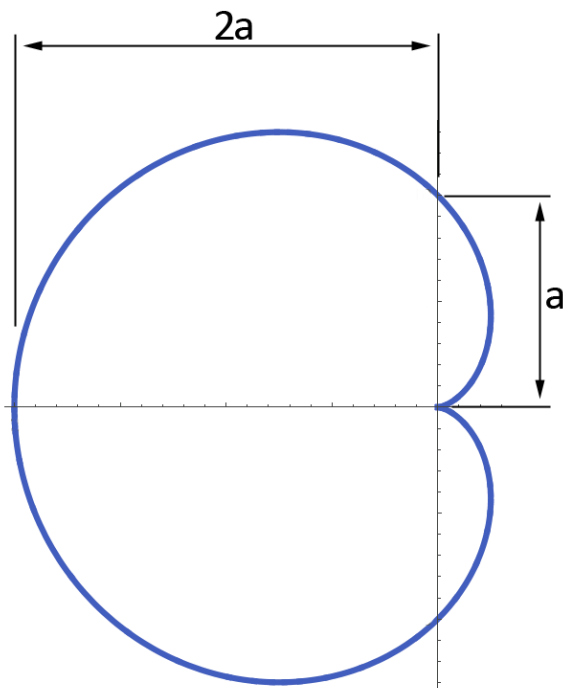
a) La parametrización inmediata es:

$$\begin{aligned} x &= \rho(\theta) \cos(\theta) \\ y &= \rho(\theta) \sin(\theta) \\ \Rightarrow \vec{r}(\theta) &= (\rho(\theta) \cos(\theta), \rho(\theta) \sin(\theta)) \\ \Rightarrow \vec{r}(\theta) &= a \begin{pmatrix} (1 - \cos(\theta)) \cos(\theta) \\ (1 - \cos(\theta)) \sin(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \rho(0) &= 0 & \rho(\pi) &= 2a & \rho(2\pi) &= 0 \\ \rho(\pi/2) &= a & \rho(3\pi/2) &= a \end{aligned}$$

Además, entre 0 y  $\pi/2$ , el coseno decrece desde 1 a 0, por lo que  $\rho(\theta)$  crece de 0 a  $a$ . Luego, entre  $\pi/2$  y  $\pi$  el coseno sigue decreciendo hacia los negativos, por lo que  $\rho(\theta)$  sigue aumentando hasta  $2a$ . Después de esto, el comportamiento del coseno se invierte, por lo que  $\rho(\theta)$  se *devuelve* desde  $2a$ , pasando por  $a$  en  $\theta = 3\pi/2$ , hasta  $\rho(2\pi) = 0$ .



Note que

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta) = a \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\theta) - (1 - \cos(\theta)) \sin(\theta) \\ \sin^2(\theta) + (1 - \cos(\theta)) \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta = 0) = \frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta = 2\pi) = 0$$

Por lo que en esos valores de  $\theta$  existen irregularidades (esto es cuando la curva forma una *punta* en el origen).

b)

$$\begin{aligned} \vec{r}(\theta) &= a((1 - \cos(\theta)) \cos(\theta), (1 - \cos(\theta)) \sin(\theta)) \\ \frac{d\vec{r}}{dt}(\theta) &= a(\sin(\theta) \cos(\theta) - (1 - \cos(\theta)) \sin(\theta), \sin^2(\theta) + (1 - \cos(\theta)) \cos(\theta)) \\ &= a(2 \sin(\theta) \cos(\theta) - \sin(\theta), \cos(\theta) - (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))) \\ &= a(\sin(2\theta) - \sin(\theta), \cos(\theta) - \cos(2\theta)) \\ \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(\theta) \right\|^2 &= a^2((\sin(2\theta) - \sin(\theta))^2 + (\cos(\theta) - \cos(2\theta))^2) \\ &= a^2((\sin^2(2\theta) + \cos^2(2\theta)) + (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) - 2(\cos(2\theta) \cos(\theta) + \sin(2\theta) \sin(\theta))) \\ &= a^2(2 - 2 \cos(2\theta - \theta)) = 2a^2(1 - \cos(\theta)) \\ \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(\theta) \right\| &= a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\theta)} \end{aligned}$$

Luego

$$L(\Gamma) = \int_0^{2\pi} a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\theta)} d\theta$$

Notemos que  $1 - \cos(\theta) = (\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)) - (\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)) = 2 \sin^2(\theta/2)$ , por lo que la integral a calcular es:

$$L(\Gamma) = \int_0^{2\pi} a\sqrt{2}\sqrt{2 \sin^2(\theta/2)} d\theta = 2a \int_0^{2\pi} |\sin(\theta/2)| d\theta$$

Pero  $\theta \in [0, 2\pi]$ , por lo que  $\theta/2 \in [0, \pi]$  y  $\sin(\theta/2) \geq 0$ .

$$\begin{aligned} L(\Gamma) &= 2a \int_0^{2\pi} \sin(\theta/2) d\theta \quad , \quad 2u = \theta \rightarrow 2du = d\theta \\ &= 4a \int_0^\pi \sin(u) du = 4a \cos(u) \Big|_\pi^0 = 8a \end{aligned}$$

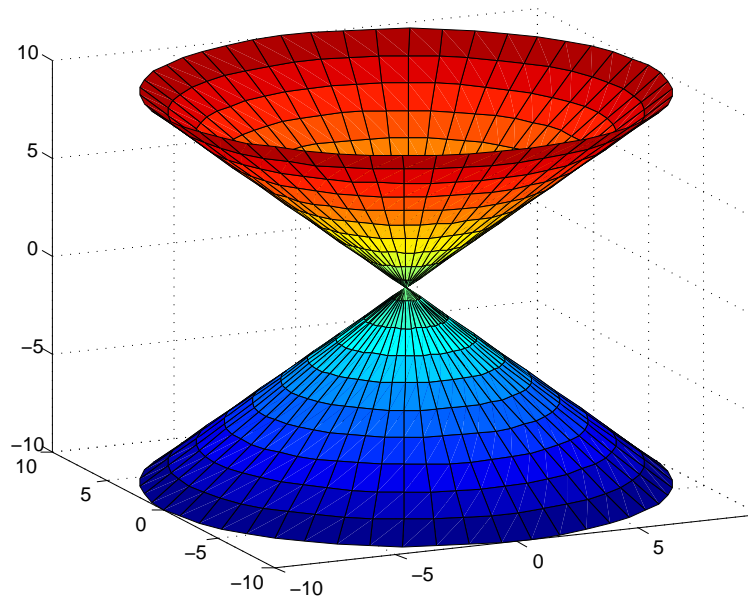
**P2.** Se nos entrega el cono de ecuación:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

A modo de facilitar la visualización de la forma de este cono, note que si fijamos el valor de la altura en  $z = z_0$ , entonces obtenemos una ecuación de la forma  $x^2 + y^2 = z_0^2$ . Es decir, una circunferencia centrada en el eje  $OZ$ , de radio  $z_0$  y a una altura  $z_0$ . En definitiva, si nos acercamos al origen a través del eje  $OZ$  desde arriba, el radio de nuestras circunferencias dibujadas centradas en el eje  $OZ$  irá disminuyendo conforme disminuye la altura hasta que, justo en el origen, tengamos la ecuación para  $z = 0$ :

$$x^2 + y^2 = 0$$

Cuya única solución es  $x = y = 0$ , es decir, en  $z = 0$  el cono contiene solo al origen. Esto último nos dice que en el origen se encuentra el vértice de nuestro cono. Como la ecuación  $x^2 + y^2 = z^2$  es totalmente simétrica para los ejes, si nos acercamos a través del eje  $OZ$  desde abajo tendremos otro cono de orientación opuesta que se encuentra en el origen con el que ya analizamos.



- a) La relación entre la altura  $z$  y el ángulo  $\theta$  en el enunciado sugiere realizar una parametrización en coordenadas cilíndricas. Supongamos, pues, que la partícula  $P$  se encuentra en:

$$\vec{r}(\rho, \theta, z) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z)$$

Debido a que la partícula  $P$  se encuentra en el cono de ecuación  $x^2 + y^2 = z^2$ , se debe cumplir que:

$$(\rho \cos(\theta))^2 + (\rho \sin(\theta))^2 = z^2 \Rightarrow \rho = |z|$$

Lo último puesto que  $\rho \in [0, \infty)$ . Además, nos dicen que  $z = e^{-\theta}$ , con  $\theta \in [0, \infty)$ , por lo que en resumen:

$$\rho = |z| = e^{-\theta} \quad z = e^{-\theta}$$

Y por lo tanto se tiene la parametrización:

$$\vec{r}(\theta) = (e^{-\theta} \cos(\theta), e^{-\theta} \sin(\theta), e^{-\theta}) \quad \theta \in [0, \infty)$$

Note en primer lugar que  $z = e^{-\theta}$  nos dice que la componente  $z$  de la partícula nunca será negativa y por lo tanto la partícula se mueve en el cono superior (el que está en la parte positiva del eje  $OZ$ ). Note también que mientras  $\theta$  aumenta, es decir, mientras la partícula gira en torno al eje  $OZ$ ,  $z = e^{-\theta}$  disminuye, desde una amplitud máxima para  $\theta = 0$ ,  $z_0 = e^0 = 1$ . Este comportamiento nos dice que la partícula describe una espiral hacia el origen. Note, por último, que  $z$  nunca será nulo puesto que la exponencial que la define nunca se anulará. En definitiva, la partícula bajará en espiral indefinidamente, sin llegar nunca a tocar el origen.

b) Recordemos que  $\vec{r}(\theta) = (e^{-\theta} \cos(\theta), e^{-\theta} \sin(\theta), e^{-\theta})$ , por lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt}(\theta) &= (-e^{-\theta} \cos(\theta) - e^{-\theta} \sin(\theta), -e^{-\theta} \sin(\theta) + e^{-\theta} \cos(\theta), -e^{-\theta}) \\ &= -e^{-\theta}(\cos(\theta) + \sin(\theta), \sin(\theta) - \cos(\theta), 1) \\ \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(\theta) \right\|^2 &= e^{-2\theta}((\cos(\theta) + \sin(\theta))^2 + (\sin(\theta) - \cos(\theta))^2 + 1) \\ &= e^{-2\theta}(2(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) + 1) = 3e^{-2\theta} \\ \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(\theta) \right\| &= e^{-\theta} \sqrt{3} \end{aligned}$$

Y finalmente, podemos interpretar el largo total de la curva como el límite de la longitud de la curva hasta  $\theta$  cuando  $\theta$  tiende a  $\infty$ , si es que existe.

$$\begin{aligned} L(\Gamma) &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \int_0^\theta e^{-t} \sqrt{3} dt \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} e^{-t} \sqrt{3} \Big|_0^\theta = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \sqrt{3}(1 - e^{-\theta}) = \sqrt{3} \end{aligned}$$

c) Recordemos que

$$\begin{aligned} \vec{r}(\theta) &= (e^{-\theta} \cos(\theta), e^{-\theta} \sin(\theta), e^{-\theta}) \\ \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(\theta) \right\| &= e^{-\theta} \sqrt{3} \end{aligned}$$

Se tiene entonces que  $s(\theta)$ , la longitud de arco hasta  $\theta$ , está dada por:

$$s(\theta) = \int_0^\theta e^{-t} \sqrt{3} dt = \sqrt{3} e^{-t} \Big|_0^\theta = \sqrt{3}(1 - e^{-\theta})$$

Queremos encontrar  $\theta(s)$ , es decir, despejar a  $\theta$  en función de  $s$ , para luego hacer:

$$\vec{r}(\theta) = \vec{r}(\theta(s)) = \vec{\sigma}(s)$$

Es decir, la parametrización natural. Luego:

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{3}(1 - e^{-\theta}) \\ \Rightarrow \theta &= -\ln \left( 1 - \frac{s}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

Con lo que:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(s) &= \vec{r} \left( -\ln \left( 1 - \frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right) \\ \vec{\sigma}(s) &= \left( \left( 1 - \frac{s}{\sqrt{3}} \right) \cos \left( \ln \left( 1 - \frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right), \left( 1 - \frac{s}{\sqrt{3}} \right) \sin \left( \ln \left( 1 - \frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right), \left( 1 - \frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right) \end{aligned}$$

**P3.**

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (\sin(t), \cos(t) + \ln(\tan(t/2))) \\ \dot{\vec{r}}(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \left( \cos(t), -\sin(t) + \frac{\sec^2(t/2)}{2 \tan(t/2)} \right)\end{aligned}$$

Notemos que:

$$\frac{\sec^2(t/2)}{2 \tan(t/2)} = \frac{\cos(t/2)}{2 \sin(t/2) \cos^2(t/2)} = (2 \sin(t/2) \cos(t/2))^{-1} = \frac{1}{\sin(t)}$$

Luego

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= \left( \cos(t), -\sin(t) + \frac{1}{\sin(t)} \right) = \cos(t)(1, \cot(t)) \\ \|\dot{\vec{r}}(t)\|^2 &= \cos^2(t)(1 + \cot^2(t))\end{aligned}$$

Tenemos que  $\vec{r}(t)$  será regular si  $\|\dot{\vec{r}}(t)\| > 0$ . Determinemos para qué valores de  $t$  se tienen irregularidades ( $\|\dot{\vec{r}}(t)\| = 0$ ). Veamos primero que:

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = 0 \Leftrightarrow \|\dot{\vec{r}}(t)\|^2 = 0 \Leftrightarrow \cos^2(t)(1 + \cot^2(t)) = 0$$

Pero  $(1 + \cot^2(t))$  es siempre positivo, por lo que habrá irregularidades solamente cuando  $\cos^2(t) = 0$ , lo que con  $t \in [0, \pi]$  se tiene solamente para  $t = \pi/2$ .

**P4.**

$$\begin{aligned}\vec{r}(s) &= \left( a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{bs}{c} \right) \\ \dot{\vec{r}}(s) &= \left( -\frac{a}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c} \right) \\ \|\dot{\vec{r}}(s)\|^2 &= \frac{a^2}{c^2} \sin^2\left(\frac{s}{c}\right) + \frac{a^2}{c^2} \cos^2\left(\frac{s}{c}\right) + \frac{b^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}(a^2 + b^2)\end{aligned}$$

Pero  $c^2 = a^2 + b^2$ , por lo que  $\|\dot{\vec{r}}(s)\|^2 = 1 \Rightarrow \|\dot{\vec{r}}(s)\| = 1$ . Sea ahora  $\varphi(s)$  la función de longitud de arco desde 0 hasta  $s$ . Luego:

$$\varphi(s) = \int_0^s \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt = \int_0^s dt = t \Big|_0^s = s$$

Por lo que  $\varphi(s) = s$ , es decir,  $s$  es igual a la longitud de arco sobre  $\Gamma$ .

# SOLUCIÓN APUNTE MA1002

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### SEMANA 12

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas  
Use este material con responsabilidad.

**P1.** Usando la indicación, sea:

$$\theta(s) = \int_0^s g(\tau) d\tau \quad x(s) = \int_0^s \cos \theta(\tau) d\tau \quad y(s) = \int_0^s \sin \theta(\tau) d\tau$$

Y sea  $\vec{r}(s) = (x(s), y(s))$  la parametrización de una curva  $\Gamma$ , con  $\vec{r}: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Debido a la definición de  $\theta(s)$  y que  $g$  tiene por dominio  $[0, \ell]$ , tiene sentido definir a  $\vec{r}$  de esta manera. Veamos que:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{ds} &= (x', y') \xrightarrow{TFC} (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) \\ \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| &= \sqrt{\cos^2(\theta(s)) + \sin^2(\theta(s))} = 1 \end{aligned}$$

Luego, si  $\phi(s)$  es la función de longitud de arco, entonces:

$$\phi(s) = \int_0^s \left\| \frac{d\vec{r}}{ds}(\tau) \right\| d\tau = \int_0^s d\tau = s$$

Es decir,  $s$  es la función de longitud de arco, por lo que la longitud de  $\Gamma$  es  $\phi(\ell) = \ell$ . Además,  $\vec{r}$  es parametrización natural, y:

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{d\vec{r}}{ds} = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))) \\ \frac{dT}{ds}(s) &= (-\sin(\theta(s)) \cdot \theta'(s), \cos(\theta(s)) \cdot \theta'(s)) \\ &= g(s)(-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s))) \\ \left\| \frac{dT}{ds}(s) \right\| &= |g(s)| \sqrt{\sin^2(\theta(s)) + \cos^2(\theta(s))} = |g(s)| \end{aligned}$$

Y como la curvatura está dada por:

$$\kappa(s) = \left\| \frac{dT}{ds}(s) \right\| = |g(s)|$$

Se tiene lo pedido.

**P2.** Se tiene que  $\vec{r}(x) = (x, f(x))$ ;  $x \in [a, b]$  es una parametrización de  $\Gamma$ , pues es el grafo de  $f$ .

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = (1, f'(x)) \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{r}}{dx} \right\| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Por lo que la longitud de la curva está dada por:

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Además tenemos que:

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{d\vec{r}}{dx} / \left\| \frac{d\vec{r}}{dx} \right\| = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}, \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right) \\ \frac{dT}{dx} &= \left( -\frac{f'(x)f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}, \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} \right) \\ \left\| \frac{dT}{dx} \right\|^2 &= \left( \frac{f'(x)f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} \right)^2 + \left( \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} \right)^2 \\ &= (1 + (f'(x))^2) \left( \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} \right)^2 \\ \Rightarrow \left\| \frac{dT}{dx} \right\| &= \sqrt{1 + (f'(x))^2} \frac{|f''(x)|}{|1 + (f'(x))^2|^{3/2}} \\ \Rightarrow \kappa(x) &= \left\| \frac{dT}{dx} \right\| / \left\| \frac{d\vec{r}}{dx} \right\| = \frac{|f''(x)|}{|1 + (f'(x))^2|^{3/2}} \end{aligned}$$

**P3.**

a) Deseamos demostrar que:

$$\tau(s) = \frac{\langle \sigma'(s) \times \sigma''(s), \sigma'''(s) \rangle}{\|\sigma''(s)\|^2}$$

Antes de continuar veamos que la derivada de una norma es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|r(t)\| &= \frac{d}{dt} \sqrt{\langle r(t), r(t) \rangle} = \frac{\langle r(t), r(t) \rangle'}{2\sqrt{\langle r(t), r(t) \rangle}} \\ &= \frac{\langle r'(t), r(t) \rangle + \langle r(t), r'(t) \rangle}{2\sqrt{\langle r(t), r(t) \rangle}} = \frac{\langle r(t), r'(t) \rangle}{\sqrt{\langle r(t), r(t) \rangle}} \\ &= \frac{\langle r(t), r'(t) \rangle}{\|r(t)\|} \end{aligned}$$

A continuación aceptaremos que  $\sigma'(s) = \sigma'$ ,  $\sigma''(s) = \sigma''$  y  $\sigma'''(s) = \sigma'''$  por facilidad en la escritura. Recordando las definiciones tenemos que:

$$\begin{aligned} T(s) &= \sigma' \\ N(s) &= T'(s) / \|T'(s)\| = \frac{\sigma''}{\|\sigma''\|} \\ B(s) &= T(s) \times N(s) = \sigma' \times \frac{\sigma''}{\|\sigma''\|} \end{aligned}$$

Veamos cómo se expresa  $\frac{dB}{ds}(s)$ . Para esto, usaremos la propiedad de la derivada de un producto y de un cuociente, que sirven también para vectores, y para el producto punto y escalar.

$$\begin{aligned}
 \frac{dB}{ds}(s) &= \frac{d}{ds} \left( \sigma' \times \frac{\sigma''}{\|\sigma''\|} \right)' \\
 &= \sigma'' \times \frac{\sigma''}{\|\sigma''\|} + \sigma' \times \left( \frac{\sigma''}{\|\sigma''\|} \right)' \quad \text{Pero } \sigma'' \times \sigma'' = 0 \\
 &= \sigma' \times \left( \frac{\sigma''' \|\sigma''\| - \sigma'' \|\sigma''\|'}{\|\sigma''\|^2} \right) \\
 &= \sigma' \times \left( \frac{\sigma'''}{\|\sigma''\|} - \frac{\sigma'' \langle \sigma'', \sigma''' \rangle}{\|\sigma''\|^3} \right) \\
 &= (\sigma' \times \sigma''') \frac{1}{\|\sigma''\|} - (\sigma' \times \sigma'') \frac{\langle \sigma'', \sigma''' \rangle}{\|\sigma''\|^3}
 \end{aligned}$$

Luego, recordando que  $\tau(s) = \langle -N, \frac{dB}{ds} \rangle$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
 \tau(s) &= \left\langle -\frac{\sigma''}{\|\sigma''\|}, (\sigma' \times \sigma''') \frac{1}{\|\sigma''\|} - (\sigma' \times \sigma'') \frac{\langle \sigma'', \sigma''' \rangle}{\|\sigma''\|^3} \right\rangle \\
 &= -\left\langle \frac{\sigma''}{\|\sigma''\|}, (\sigma' \times \sigma''') \frac{1}{\|\sigma''\|} \right\rangle + \left\langle \frac{\sigma''}{\|\sigma''\|}, (\sigma' \times \sigma'') \frac{\langle \sigma'', \sigma''' \rangle}{\|\sigma''\|^3} \right\rangle
 \end{aligned}$$

Pero  $\sigma''$  es ortogonal a  $\sigma' \times \sigma''$ , por lo que  $\langle \sigma'', \sigma' \times \sigma'' \rangle$  es nulo y el segundo miembro de la expresión se anula. Simplemente nos queda:

$$\tau(s) = -\left\langle \frac{\sigma''}{\|\sigma''\|}, (\sigma' \times \sigma''') \frac{1}{\|\sigma''\|} \right\rangle = \frac{-\langle \sigma'', \sigma' \times \sigma''' \rangle}{\|\sigma''\|^2}$$

Notemos que esto es *casi* lo que buscamos, puesto que en el numerador tenemos  $-\langle \sigma'', \sigma' \times \sigma''' \rangle$  y necesitamos  $\langle \sigma''', \sigma' \times \sigma'' \rangle$ . Note que ambas expresiones pueden obtenerse a partir de la derivación de  $\langle \sigma'', \sigma' \times \sigma'' \rangle$ . Esta expresión es de interés puesto que sabemos que es nula. Luego podemos obtener:

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma'', \sigma' \times \sigma'' \rangle &= 0 \quad \frac{d}{ds} ( ) \\
 \langle \sigma''', \sigma' \times \sigma'' \rangle + \langle \sigma'', (\sigma' \times \sigma'')' \rangle &= 0 \\
 \langle \sigma''', \sigma' \times \sigma'' \rangle + \langle \sigma'', \sigma'' \times \sigma'' + \sigma' \times \sigma''' \rangle &= 0 \\
 \langle \sigma''', \sigma' \times \sigma'' \rangle + \langle \sigma'', \sigma' \times \sigma''' \rangle &= 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $-\langle \sigma'', \sigma' \times \sigma''' \rangle = \langle \sigma''', \sigma' \times \sigma'' \rangle$  y reemplazando esto obtenemos el resultado deseado:

$$\tau(s) = \frac{\langle \sigma''', \sigma' \times \sigma'' \rangle}{\|\sigma''\|^2}$$

b)  $\vec{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t), \sin(t), t)$ . Veamos que:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(t), \cos(t), 1) \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = 1$$

Por lo que:

$$s(t) = \int_0^t \left\| \frac{d\vec{r}}{d\tau}(\tau) \right\| d\tau = \int_0^t d\tau = t$$

Es decir,  $\vec{r}(t)$  es la parametrización natural  $\sigma(s)$  correspondiente. Luego:

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(s), \sin(s), s) \quad ; \quad \sigma''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos(s), -\sin(s), 0) \\ \sigma'(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(s), \cos(s), 1) \quad ; \quad \sigma'''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(s), -\cos(s), 0) \\ \|\sigma''(s)\| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos^2(s) + \sin^2(s)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{1}{\|\sigma''(s)\|^2} = 2 \\ \sigma'(s) \times \sigma''(s) &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin(s) & \cos(s) & 1 \\ -\cos(s) & -\sin(s) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\sin(s), -\cos(s), 1) \\ \tau(s) &= \frac{(\sigma'(s) \times \sigma''(s)) \cdot \sigma'''(s)}{\|\sigma''(s)\|^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(s), -\cos(s), 1) \cdot (\sin(s), -\cos(s), 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

**P4.** Se considera la curva  $\Gamma$  que se forma al intersectar las superficies

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ x^2 + z^2 &= 4 + y^2 \end{aligned}$$

Donde se toma en cuenta solo la parte de la curva con  $z > 0$ .

a) Usando la indicación, sea la parametrización:

$$\vec{r}(\rho, \theta, z) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z)$$

Como sabemos que se debe cumplir el sistema de ecuaciones, tenemos necesariamente que:

$$\begin{aligned} \rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta) &= 4 \Rightarrow \rho = 2 \\ \rho^2 \cos^2(\theta) + z^2 &= 4 + \rho^2 \sin^2(\theta) \\ \Rightarrow z^2 &= 4 - 4 \cos^2(\theta) + 4 \sin^2(\theta) = 4(1 - \cos^2(\theta)) + 4 \sin^2(\theta) = 8 \sin^2(\theta) \\ \Rightarrow z &= 2\sqrt{2} |\sin(\theta)| \end{aligned}$$

Lo último puesto que se pide solo  $z > 0$ . La parametrización resultante es:

$$\vec{r}(\theta) = (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), 2\sqrt{2} |\sin(\theta)|), \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

b) Pendiente.

**P5.**  $\vec{r}(t) = (6t^2, 4\sqrt{2}t^3, 3t^4)$ ,  $t \in [0, 1]$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (12t, 12\sqrt{2}t^2, 12t^3) = 12t(1, \sqrt{2}t, t^2)$$

$$\Rightarrow \|\dot{\vec{r}}(t)\| = 12t\sqrt{1 + 2t^2 + t^4} = 12t\sqrt{(1 + t^2)^2} = 12t(1 + t^2)$$

a)  $\rho(\vec{r}(t)) = t^2$ . Luego:

$$M = \int_0^1 \rho(\vec{r}(t)) \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt = \int_0^1 12t^3(1 + t^2) dt = 12 \int_0^1 (t^3 + t^5) dt$$

$$M = 12 \left( \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6} \right) \Big|_0^1 = 12 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) = 3 + 2 = 5$$

b) El origen se encuentra justamente en  $\vec{r}(t = 0)$ , por lo que la distancia al origen a lo largo de la curva es simplemente la función de longitud de arco. Entonces  $\rho(\vec{r}(t)) = s(t) + 1$  y:

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\vec{r}}(\tau)\| d\tau = \int_0^t 12\tau(1 + \tau^2) d\tau = 12 \int_0^t (\tau + \tau^3) d\tau$$

$$s(t) = 12 \left( \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{4} \right) \Big|_0^t = 6t^2 + 3t^4 \Rightarrow \rho(\vec{r}(t)) = 3t^4 + 6t^2 + 1$$

$$M = \int_0^1 \rho(\vec{r}(t)) \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt = 12 \int_0^1 (3t^7 + 3t^6 + 6t^5 + 6t^4 + t^3 + t^2) dt$$

$$M = 12 \left( \frac{3}{8}t^8 + \frac{3}{7}t^7 + t^6 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2803}{70}$$

c) Pendiente.

**P6.**  $\vec{r}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t), 0)$

a)  $\dot{\vec{r}}(t) = (-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t), 0)$ . Luego:

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = 3\sqrt{\cos^4(t)\sin^2(t) + \sin^4(t)\cos^2(t)} = 3\sqrt{\sin^2(t)\cos^2(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t))} = 3|\sin(t)\cos(t)|$$

Como el vector tangente se define como:

$$T(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|}$$

Es claro que no está definido para normas nulas de  $\dot{\vec{r}}(t)$ . Luego, en este caso, no está definido para  $t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ . Como la normal, el binormal, la curvatura y la torsión provienen del vector tangente, también dejan de estar definidos para esos valores de  $t$ . Ya que la norma de  $\dot{\vec{r}}(t)$  posee un módulo, se hace necesario separar los casos:

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = 3\sin(t)\cos(t), \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = -3\sin(t)\cos(t), \quad t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

Resumamos esto en una constante  $s$  que vale 1 o  $-1$  según corresponda para los intervalos recién mencionados. Es claro que  $s^{-1} = s$ ,  $|s| = 1$  y  $s^2 = 1$ . Luego tenemos que:

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = 3s\sin(t)\cos(t)$$

$$T(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|} = \frac{(-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t), 0)}{3s\sin(t)\cos(t)} = s(-\cos(t), \sin(t), 0)$$

$$\frac{dT}{dt}(t) = s(\sin(t), \cos(t), 0) \Rightarrow \left\| \frac{dT}{dt}(t) \right\| = 1$$

$$N(t) = \frac{dT}{dt}(t) / \left\| \frac{dT}{dt}(t) \right\| = s(\sin(t), \cos(t), 0)$$

$$B(t) = T(t) \times N(t) = s^2(-\cos(t), \sin(t), 0) \times (\sin(t), \cos(t), 0)$$

$$B(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\cos(t) & \sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \end{vmatrix} = (-\cos^2(t) - \sin^2(t))\hat{k} = -\hat{k} = (0, 0, -1)$$

$$\kappa(t) = \frac{dT}{dt}(t) / \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| = \frac{1}{3s\sin(t)\cos(t)} = \frac{s}{3\sin(t)\cos(t)}$$

$$\frac{dB}{dt} = (0, 0, 0) = 0 \Rightarrow \tau(t) = -N \cdot \left( \frac{dB}{ds} / \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| \right) = 0$$

b) Recordando que  $\|\dot{\vec{r}}(t)\| = 3|\sin(t)\cos(t)| = \frac{3}{2}|\sin(2t)|$ , tenemos que:

$$s(t) = \frac{3}{2} \int_0^t |\sin(2t)| dt$$

Debido al valor absoluto, resolveremos la integral por intervalos.

1)  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

$$s(t) = \frac{3}{2} \int_0^t \sin(2u) du = \frac{3}{4} \cos(2u) \Big|_t^0 = \frac{3}{4}(1 - \cos(2t))$$

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}(1 - \cos(\pi)) = \frac{3}{2}$$

2)  $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ .

$$s(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^t \sin(2u) du = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \cos(2u) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^t = \frac{3}{4}(3 + \cos(2t))$$

$$s(\pi) = \frac{3}{4}(3 + \cos(2\pi)) = 3$$

3)  $t \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ .

$$s(t) = 3 + \frac{3}{2} \int_{\pi}^t \sin(2u) du = 3 + \frac{3}{4} \cos(2u) \Big|_{\pi}^t = \frac{3}{4}(5 - \cos(2t))$$

$$s\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}(5 - \cos(3\pi)) = \frac{9}{2}$$

4)  $t \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ .

$$s(t) = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} \int_{\frac{3\pi}{2}}^t \sin(2u) du = \frac{9}{2} + \frac{3}{4} \cos(2u) \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^t = \frac{3}{4}(7 + \cos(2t))$$

$$s(2\pi) = \frac{3}{4}(7 + \cos(4\pi)) = 6$$

El largo total de la curva es simplemente  $s(2\pi) = 6$ . Es interesante notar que podemos resumir nuestros resultados en:

$$s(t) = \frac{3}{4} \left( 2n + 1 - \cos \left( 2 \left( t - n \frac{\pi}{2} \right) \right) \right)$$

$$= \frac{3n}{2} + \frac{3}{4} (1 - \cos(2t - n\pi)), \quad t \in \left[ n \frac{\pi}{2}, (n+1) \frac{\pi}{2} \right]$$

$$s \left( n \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3n}{2}$$

Donde  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$  según sea el intervalo en donde está  $t$ . La abreviación del cambio de signo del coseno no es la más natural, pero sí es muy conveniente. Se basa en que, en realidad, al movernos en los intervalos de  $t$  siempre nos estamos quedando con la primera porción de la función  $\cos(2t)$ , que es la que va desde 0 hasta  $\frac{\pi}{2}$ . De este modo trasladamos  $t$  al intervalo  $[0, \pi/2]$  restando  $n\pi/2$ . Note que esta forma de presentar la solución evidencia una *escalada* en la integral. Esto se debe a que la función cuya integral calculamos es  $|\sin(2t)|$ , en cuya gráfica encontramos una sucesión periódica de *lomas* de ancho  $\pi/2$  (todas las partes negativas de la función  $\sin(2t)$  *suben*). Cada loma posee un área igual a  $3/2$ , por lo que al pasar de una loma a otra, se suma  $3/2$  tantas veces como lomas sean completadas, y se integra solo la última loma, de forma exacta a como se integra la primera por tener la misma forma (esto se ve reflejado en que trasladamos todos los valores de  $t$  al intervalo  $[0, \pi/2]$  dentro del coseno). La función  $s(t)$  es entonces una función con *escalones* hechos de la porción  $[0, \pi/2]$  de la función  $\frac{3}{4}(1 - \cos(2t))$ .

Podemos despejar  $t$  como:

$$s = \frac{3n}{2} + \frac{3}{4} (1 - \cos(2t - n\pi))$$

$$\frac{4s}{3} - 2n = 1 - \cos(2t - n\pi)$$

$$\cos(2t - n\pi) = 2n + 1 - \frac{4s}{3}$$

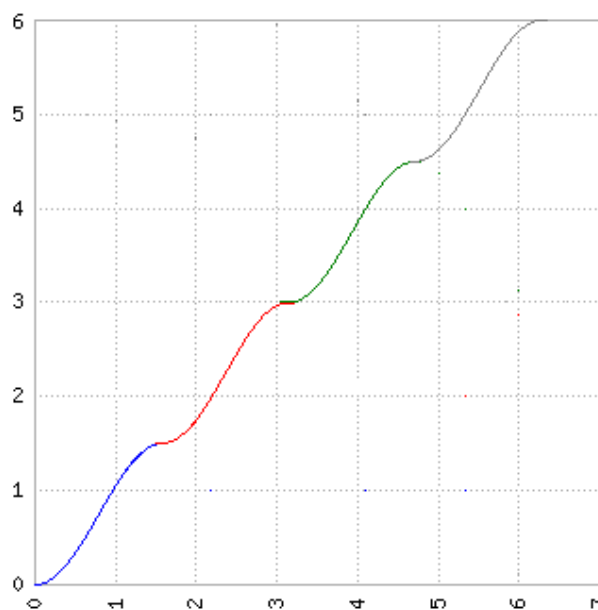
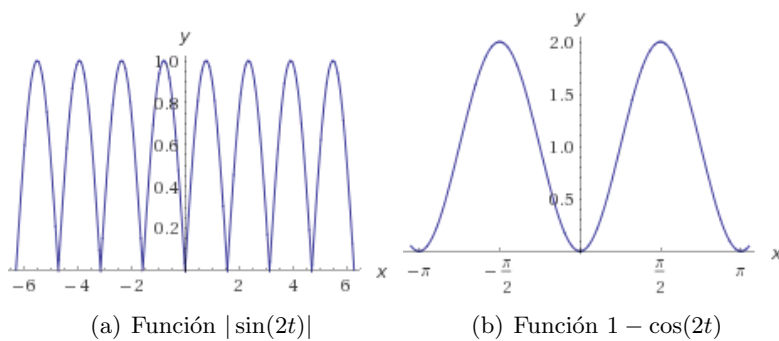
$$(2t - n\pi) \in [0, \pi] \Rightarrow 2t - n\pi = \arccos \left( 2n + 1 - \frac{4s}{3} \right)$$

$$t = \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2} \arccos \left( 2n + 1 - \frac{4s}{3} \right), \quad s \in \left[ \frac{3n}{2}, \frac{3(n+1)}{2} \right]$$

Recordando que  $\vec{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t), 0)$ , reemplazando  $t$  por la expresión recién calculada obtendremos la parametrización natural o parametrización en longitud de arco.

$$\sigma(s) = \left( \cos^3 \left( \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2} \arccos \left( 2n + 1 - \frac{4s}{3} \right) \right), \sin^3 \left( \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2} \arccos \left( 2n + 1 - \frac{4s}{3} \right) \right), 0 \right)$$

$$s \in \left[ \frac{3n}{2}, \frac{3(n+1)}{2} \right], 0 \leq s \leq 6$$



Función  $s(t)$

# SOLUCIÓN APUNTE MA1002

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### SEMANA 13

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas  
Use este material con responsabilidad.

**P1.**

a) Notemos que:

$$\int_{1+}^2 \frac{dx}{x(\ln x)^2}; \quad u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} = \int_{0+}^{\ln(2)} \frac{du}{u^2}$$

$$\int_{1+}^2 \frac{dx}{(x-1)^2}; \quad u = x-1 \quad du = dx = \int_{0+}^1 \frac{du}{u^2}$$

Es decir, son integrales de segunda especie de la forma:

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}$$

Con  $\alpha = 2 > 1$ . Por lo tanto divergen.

b) En primer lugar tenemos que:

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}; \quad u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{\ln x} + c$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + c$$

Luego tenemos que  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$  tiene por primitiva:

$$\int f = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} + c$$

La integral pedida la separamos en:

$$\int_1^\infty f = \int_1^e f + \int_e^\infty f = \lim_{a \rightarrow 1+} \int_a^e f + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_e^b f$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty f &= \lim_{a \rightarrow 1+} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \Big|_a^e + \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \Big|_e^b \\ &= - \lim_{a \rightarrow 1+} \left( \frac{1}{a-1} - \frac{1}{\ln a} \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{b-1} - \frac{1}{\ln b} \right) \end{aligned}$$

Donde:

$$\lim_{a \rightarrow 1+} \left( \frac{1}{a-1} - \frac{1}{\ln a} \right) = \lim_{a \rightarrow 1+} \frac{\ln(a) - a + 1}{(a-1)\ln(a)} \xrightarrow{L'H} \lim_{a \rightarrow 1+} \frac{\frac{1}{a} - 1}{1 - \frac{1}{a} + \ln(a)} \xrightarrow{L'H} \lim_{a \rightarrow 1+} \frac{\frac{-1}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{b-1} - \frac{1}{\ln b} \right) = 0$$

Así que finalmente tenemos:

$$\int_1^\infty f = - \lim_{a \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{a-1} - \frac{1}{\ln a} \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{b-1} - \frac{1}{\ln b} \right) = \frac{1}{2}$$

Lo que prueba simultáneamente que la integral converge.

- c) Comparemos por cociente con  $\frac{1}{x^\beta}$ , cuya integral impropia  $\int_{0^+}^1 \frac{1}{x^\beta}$  converge para  $\beta < 1$  y diverge cuando  $\beta \geq 1$ . Así que resolvemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\beta}{x^{\alpha(1-x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\beta x^{\alpha x}}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\beta-\alpha} e^{\alpha x \ln(x)}$$

Pero tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ . En efecto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

Así que si tomamos  $\beta = \alpha$  el límite se vuelve:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\beta}{x^{\alpha(1-x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\beta-\alpha} e^{\alpha x \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\alpha x \ln(x)} = \exp \left( \alpha \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) \right) = 1$$

Por el teorema de comparación por cociente, las integrales se comportan igual. Recordando que la integral de comparación converge para  $\beta < 1$ ,  $\alpha = \beta$  y que se pide  $\alpha > 0$ , se concluye que para  $\alpha \in (0, 1)$  la integral converge.

**P2.**

- a)  $f$  es claramente continua en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  debido al álgebra de funciones continuas. Para la continuidad en  $x = 0$  necesitamos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = k$$

Para ello calculamos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sinh(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x) - x}{x^2 \sinh(x)} \\ &\xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(x) - 1}{2x \sinh(x) + x^2 \cosh(x)} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{2 \sinh(x) + 4x \cosh(x) + x^2 \sinh(x)} \\ &\xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(x)}{6 \cosh(x) + 6x \sinh(x) + x^2 \cosh(x)} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Por lo que para  $k = \frac{1}{6}$  la función  $f$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ .

- b) Notemos que como  $f$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ , la función es acotada en todos los intervalos cerrados  $[a, b]$ . Por lo tanto no posee integrales impropias de segunda especie. De aquí se extrae directamente la convergencia en  $\int_0^1 f$ . Para la integral hacia el infinito notemos que:

$$\int_1^\infty f = \int_1^\infty \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sinh(x)} \right) = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \left( 1 - \frac{x}{\sinh(x)} \right)$$

Pero

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sinh(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \frac{2}{1 - e^{-2x}} = 0$$

Por lo que lo que domina a la integral en el infinito es el término  $\frac{1}{x^2}$ . En efecto, comparando con la integral impropia  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$  tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{x}{\sinh(x)} \right) = 1$$

Por lo que las integrales se comportan igual en virtud del teorema de comparación por cociente. Como  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$  converge, se tiene que  $\int_1^\infty f$  también.

Para  $\int_0^\infty f$  basta notar que  $\int_0^\infty f = \int_0^1 f + \int_1^\infty f$ , y ya que las últimas dos integrales son convergentes, la integral en cuestión es convergente.

Para la última integral, es directo que  $f(-x) = f(x)$ , es decir, la función es par. Por lo tanto podemos hacer:

$$\int_{-\infty}^\infty f = 2 \int_0^\infty f$$

Por lo que converge. Otra forma más rigurosa de verlo es que:

$$\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^\infty f$$

Donde la última ya sabemos que converge. Para la otra veamos que:

$$\int_{-\infty}^0 f = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 f(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 f(-x)$$

Donde se usó la paridad de  $f$ . Haciendo el cambio  $u = -x$ ,  $du = -dx$  concluimos que:

$$\int_{-\infty}^0 f = \lim_{a \rightarrow \infty} - \int_a^0 f(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) = \int_0^\infty f$$

Que converge y se deduce lo mismo que antes.

**P3.**  $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$

a) Claramente su **dominio** es  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Además, por álgebra de funciones continuas, tenemos que  $f$  es **continua** en todo su dominio.

Sus **ceros** son (recordando que la exponencial siempre es estrictamente positiva):

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

**Límites importantes:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{u \rightarrow \infty} e^u (1 - u) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{u \rightarrow \infty} e^{-u} (1 + u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1 + u}{e^u} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{u \rightarrow 0} e^u (1 - u) = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f$  posee una **asíntota vertical** en  $x = 0$  (por lo que su discontinuidad no es reparable), en donde la función decrece sin cotas solo por la derecha. Además, la recta  $y = 1$  es **asíntota horizontal** de  $f$  hacia ambos infinitos.

Para el crecimiento y la concavidad primero calculamos:

$$f'(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \quad f''(x) = -e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{3x+1}{x^5}\right)$$

**Crecimiento:** Es directo ver que  $f'(x) > 0$  si  $x > 0$  y  $f'(x) < 0$  si  $x < 0$ . Se sigue que en  $(-\infty, 0)$  la función es estrictamente decreciente y que en  $(0, \infty)$  es estrictamente creciente.

**Concavidad:** Notando que:

$$\begin{aligned} (1 + 3x) &> 0 \quad \text{si} \quad x > -\frac{1}{3} \\ (1 + 3x) &< 0 \quad \text{si} \quad x < -\frac{1}{3} \\ x^5 &> 0 \quad \text{si} \quad x > 0 \\ x^5 &< 0 \quad \text{si} \quad x < 0 \end{aligned}$$

Se tiene por intervalos que  $f''(x) < 0$  en  $(-\infty, -\frac{1}{3})$ ,  $f''(x) > 0$  en  $(-\frac{1}{3}, 0)$  y  $f''(x) < 0$  en  $(0, \infty)$ . Se sigue que en  $(-\infty, -\frac{1}{3})$  y  $(0, \infty)$  la función es cóncava y en  $(-\frac{1}{3}, 0)$  es convexa. Además en  $x_0 = -\frac{1}{3}$ ,  $f''(x_0) = 0$ , por lo que  $x_0$  es punto de inflexión (cambio de concavidad).

Notemos para el **recorrido** que por la desigualdad fundamental para la exponencial se tiene:

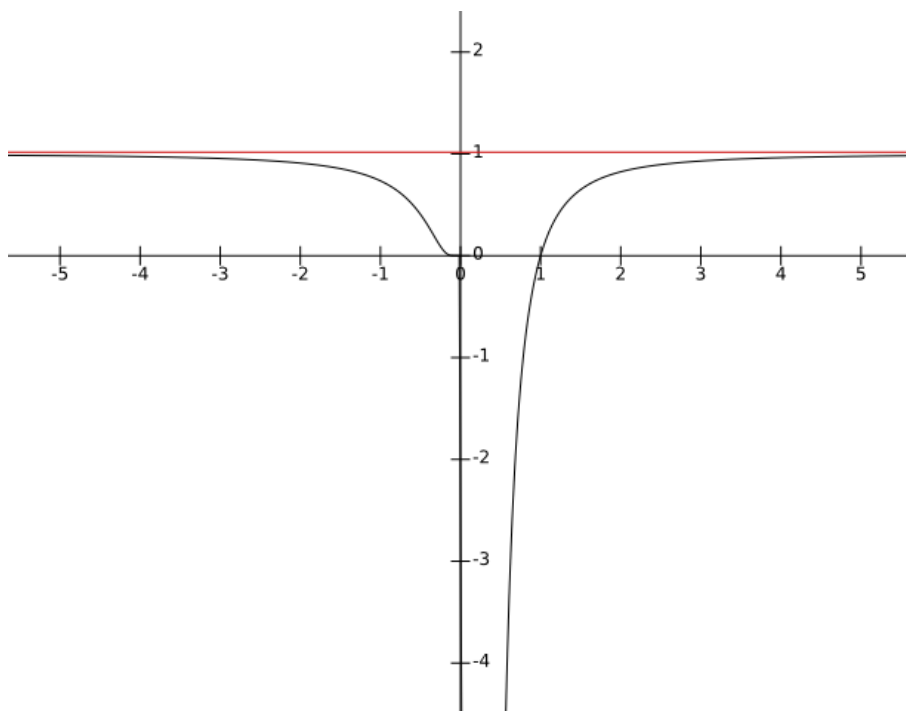
$$e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq 1$$

Donde la desigualdad fundamental se aplica solo si  $\frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ . Pero es directo de la expresión  $(1 - \frac{1}{x})$  que en  $(0, 1]$  la función es no positiva, por lo que la última desigualdad se aplica para todo el dominio. Es decir:

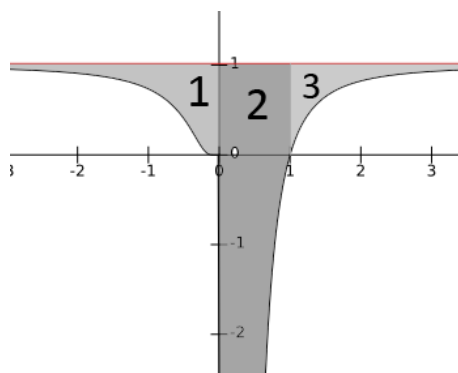
$$f(x) \leq 1, \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$$

Más aún, nunca se tiene que  $f(x) = 1$ , ya que ello solo es posible si  $\frac{1}{x} = 0$ , lo cual es imposible. Gracias a la continuidad de  $f$  en  $\mathbb{R}_+$  podemos ver lo siguiente: cuando  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x) \rightarrow 1$  y cuando  $x \rightarrow 0^+$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ , por lo que en virtud del TVI, todos los valores entre  $-\infty$  y 1 son tomados por la función. De todo lo anterior se concluye que  $\text{Rec}(f) = (-\infty, 1)$ .

Aquí un gráfico de la función:



b) Nos piden determinar:



$$R_1 = \int_{-\infty}^{0^-} (1 - f(x)) dx \quad R_2 = \int_{0^+}^1 (1 - f(x)) dx \quad R_3 = \int_1^{\infty} (1 - f(x)) dx$$

Antes de calcular, encontremos  $\int(1 - f(x))$ .

$$\begin{aligned}\int(1 - f(x))dx &= x - \int f(x)dx; \quad \begin{array}{l} u = f(x) \rightarrow du = f'(x)dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \\ &= x - xf(x) + \int xf'(x)dx = x - xe^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \int \frac{x}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx \\ &= x - e^{\frac{1}{x}} (x - 1) + \int \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}; \quad u = \frac{1}{x} \rightarrow du = -\frac{dx}{x^2} \\ &= x - e^{\frac{1}{x}} (x - 1) - \int e^u du = x - e^{\frac{1}{x}} (x - 1) - e^u + c = x - e^{\frac{1}{x}} (x - 1) - e^{\frac{1}{x}} + c \\ &= -x(e^{\frac{1}{x}} - 1) + c\end{aligned}$$

Será de utilidad por lo tanto analizar los siguientes límites de  $x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u - 1}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} - \frac{1}{u} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{e^u - 1}{u} = 0\end{aligned}$$

Es directo entonces que como  $R_1$  depende de  $x \rightarrow -\infty$  y  $x \rightarrow 0^-$  entonces converge; que como  $R_2$  depende de  $x \rightarrow 0^+$  entonces diverge; y que como  $R_3$  depende de  $x \rightarrow +\infty$  entonces converge. En efecto:

$$\begin{aligned}R_1 &= \int_{-\infty}^{0^-} (1 - f(x))dx = \int_{-\infty}^{-1} (1 - f(x))dx + \int_{-1}^{0^-} (1 - f(x))dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} (1 - f(x))dx + \lim_{b \rightarrow 0^-} \int_{-1}^b (1 - f(x))dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \Big|_{-1}^a + \lim_{b \rightarrow 0^-} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \Big|_b^{-1} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} a(e^{\frac{1}{a}} - 1) - \lim_{b \rightarrow 0^-} b(e^{\frac{1}{b}} - 1) = 1 \\ R_2 &= \int_{0^+}^1 (1 - f(x))dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 (1 - f(x))dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \Big|_a^1 = +\infty \\ R_3 &= \int_1^{\infty} (1 - f(x))dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b (1 - f(x))dx = \lim_{b \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \Big|_1^b \\ &= (e - 1) - \lim_{b \rightarrow \infty} b(e^{\frac{1}{b}} - 1) = e - 2\end{aligned}$$

**P4.**

a) Deseamos calcular:

$$\int_{-\infty}^{\ln(2)} \frac{1}{e^x + 4e^{-x}}$$

Notemos que la integral es continua en todos los reales, por lo que no forma integrales de segunda especie. Por lo tanto tenemos la integral impropia de primera especie dada por:

$$\int_{-\infty}^{\ln(2)} \frac{1}{e^x + 4e^{-x}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\ln(2)} \frac{1}{e^x + 4e^{-x}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\ln(2)} \frac{e^x}{e^{2x} + 4}$$

Tomando  $u = e^x$ ,  $du = e^x dx$  tenemos que:

$$\int_a^{\ln(2)} \frac{e^x}{e^{2x} + 4} = \int_{e^a}^2 \frac{du}{u^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{u}{2}\right) \Big|_{e^a}^2 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{e^a}{2}\right)$$

Puesto que  $e^a \rightarrow 0$  cuando  $a \rightarrow -\infty$ , aprovechamos la continuidad de  $\arctan(x)$  para obtener:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\ln(2)} \frac{e^x}{e^{2x} + 4} = \frac{\pi}{8} - \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{e^a}{2}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \arctan\left(\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{e^a}{2}\right) = \frac{\pi}{8}$$

Se concluye entonces el resultado:  $\int_{-\infty}^{\ln(2)} \frac{1}{e^x + 4e^{-x}} = \frac{\pi}{8}$ .

b) El denominador se anula en  $x = 0$  y en  $x = \pi$  para el intervalo de integración, por lo que separamos la integral a calcular como:

$$\int_0^{3\pi/2} \frac{x}{\sin(x)} = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin(x)} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x}{\sin(x)} + \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{x}{\sin(x)}$$

Notemos que la primera integral no conforma una integral impropia, puesto que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$  y por lo tanto la integral está bien definida por ser  $\frac{x}{\sin(x)}$  continua en el intervalo. Para la segunda integral, hacemos una comparación con la integral impropia:

$$\int_{\pi/2}^{\pi^-} \frac{1}{(\pi - x)^\alpha}$$

Que converge para  $\alpha < 1$  y diverge para  $\alpha \geq 1$ . Veamos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\frac{x}{\sin(x)}}{\frac{1}{(\pi-x)^\alpha}} &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(\pi-x)^\alpha x}{\sin(x)}, \quad u = \pi - x, \quad u \rightarrow 0^+ \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u^\alpha(\pi-u)}{\sin(\pi-u)}, \quad \sin(\pi-u) = \sin(\pi)\cos(u) - \sin(u)\cos(\pi) = \sin(u) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u^\alpha(\pi-u)}{\sin(u)}, \quad \text{tomando } \alpha = 1 \text{ se tiene un límite conocido} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u}{\sin(u)}(\pi-u) = \pi \end{aligned}$$

Por el criterio de comparación, las integrales se comportan igual. Pero como  $\alpha = 1$ , la integral de comparación resulta ser divergente, y se concluye entonces que la integral en cuestión también diverge.

Puesto que una de las integrales de la descomposición de la integral pedida es divergente, la integral original  $\int_0^{3\pi/2} \frac{x}{\sin(x)}$  también es divergente.

c) En primer lugar veamos que para  $x \in (0, 1]$  la función  $f(x) = |\ln(x)|$  cumple con:

$$f'(x) = (|\ln(x)|)' = (-\ln(x))' = \frac{-1}{x} \Rightarrow (f'(x))^2 = \frac{1}{x^2}$$

. La integrales a analizar son (con indefinición de  $f$  en  $x = 0$ ):

$$\begin{aligned} A_{OX} &= 2\pi \int_0^1 f \sqrt{1 + (f')^2} = -2\pi \int_{0^+}^1 \ln(x) \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx \\ A_{OY} &= 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + (f')^2} = 2\pi \int_{0^+}^1 x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx \end{aligned}$$

La integral  $A_{OY}$  es trivialmente convergente puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{\frac{1 + x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + x^2} = 1$$

Es decir, la función es continua en el intervalo de integración de forma acotada, y por lo tanto no produce una integral impropia de segunda especie.

Para la integral  $A_{OX}$ , notemos que para  $x \in (0, 1]$  se cumple (recordemos que el criterio de comparación es para funciones no negativas):

$$-\ln(x) \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\ln(1/x)}{x} \sqrt{1 + x^2} \geq \frac{\ln(1/x)}{x} = -\frac{\ln(x)}{x} \geq 0$$

Pero la integral de comparación resulta ser divergente. En efecto:

$$\begin{aligned} &\int_{0^+}^1 \frac{-\ln(x)}{x} dx, \quad u = -\ln(x), \quad du = -\frac{dx}{x} \\ &= -\int_{+\infty}^0 u du = \int_0^{+\infty} u du \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $A_{OX}$  diverge.

# SOLUCIÓN APUNTE MA1002

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### SEMANA 14

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas  
Use este material con responsabilidad.

**E1.** Vamos a separar las fracciones. Note que resultan ser todas telescópicas.

a)

$$\begin{aligned} \frac{4}{(4k-3)(4k+1)} &= \frac{(4k+1) - (4k-3)}{(4k-3)(4k+1)} \quad k \geq 0 \\ &= \frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1} = \frac{1}{4(k-1)+1} - \frac{1}{4k+1} \\ \sum \frac{4}{(4k-3)(4k+1)} &= \sum \frac{1}{4(k-1)+1} - \frac{1}{4k+1} = \lim \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+1} \right) = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} &= \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} \quad k \geq 1 \\ &= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \\ \sum \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} &= \sum \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \lim \left( 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1 \end{aligned}$$

c)

$$\sum \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{k}} = \sum \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \lim \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1$$

**E2.** Usaremos la contrarrecíproca del teorema 8.2

$$(a_n) \text{ no converge a cero} \Rightarrow \sum a_k \text{ diverge}$$

a)  $a_n = n^2$  diverge, luego  $\sum a_k$  diverge.

b)

$$a_n = n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}{1/n} \rightarrow 1 \quad (\text{límite conocido})$$

Luego  $\sum a_k$  diverge.

c)

$$a_n = n \sin \left( \frac{1}{n} \right) = \frac{\sin \left( \frac{1}{n} \right)}{1/n} \rightarrow 1 \quad (\text{límite conocido})$$

Luego  $\sum a_k$  diverge.

d)

$$a_n = \underbrace{\left( 1 + \frac{a}{n} \right)^n}_{\text{Definición de función exponencial}} \rightarrow \exp(a)$$

Pero  $\exp(a) > 0$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ , luego  $\sum a_k$  diverge.

**E3.**

a) Notemos que  $A = \sum \frac{1}{2^k}$  y  $B = \sum \frac{1}{3^k}$  son conocidamente convergentes (puesto que tanto  $1/2$  como  $1/3$  son menores que 1, y  $\sum q^k$  converge ssi  $|q| < 1$ ). Luego

$$\sum \left( \frac{5}{2^k} + \frac{1}{3^k} \right) = 5A + B$$

Es también convergente por ser combinación lineal de series convergentes.

b) Como  $a_n = (1/5)^n$  es decreciente con  $a_n \rightarrow 0$ , por Leibnitz tenemos que

$$A = \sum \frac{(-1)^k}{5^k} \text{ converge}$$

Además,  $B = \sum (1/2)^k$  es conocidamente convergente. Luego

$$\sum \left( \frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^k}{5^k} \right) = B + A$$

Es también convergente por ser combinación lineal de series convergentes.

**E4.**

a) Tenemos que  $\sum (\frac{2}{3})^k$  converge pues  $\frac{2}{3} < 1$ . Además

$$\frac{|\cos(4^k)|}{3^k} \leq \frac{1}{3^k}$$

Y como  $\sum (\frac{1}{3})^k$  converge, tenemos que  $\sum \frac{\cos(4^k)}{3^k}$  converge absolutamente y por lo tanto converge. Finalmente, por álgebra de series

$$\sum \frac{2^k + \cos(4^k)}{3^k} = \sum \left(\frac{2}{3}\right)^k + \sum \frac{\cos(4^k)}{3^k} \text{ converge.}$$

b) Cuando  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\tan(\frac{1}{k}) > 0$ , luego

$$a_k = \frac{1}{e^k + \tan(\frac{1}{k})} \leq \frac{1}{e^k}$$

Donde  $\sum \frac{1}{e^k}$  converge  $\Rightarrow \sum a_k$  converge por mayoración.

c) Es intuitivo ver que, cuando  $n$  crece mucho,  $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$  se va pareciendo mucho a  $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ . En efecto

$$\lim_{\frac{1}{n}} \frac{\frac{n+1}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n^2 + n}{n^2 + 1} = 1 > 0$$

Luego, por comparación, como  $\sum \frac{1}{k}$  diverge,  $\sum a_k$  también.

d) Recordemos que  $\ln(k) \leq k - 1$ , con lo que:

$$a_k = \frac{k + \ln(k)}{k^3} \leq \frac{k + k - 1}{k^3} = \frac{2k - 1}{k^3} \leq 2 \frac{1}{k^2}$$

Como  $\sum \frac{1}{k^2}$  converge, se tiene que  $\sum a_k$  también.

**E5.** Recordemos que  $\sum a_k$  converge  $\Rightarrow (a_n) \rightarrow 0$ . Tenemos por comparación que

$$\lim \frac{a_k^2}{a_k} = \lim a_k = 0$$

Luego  $\sum a_k$  converge  $\Rightarrow \sum a_k^2$  converge.

**E6.** Procederemos por comparación.

a) Nos serviremos de un límite conocido.

$$\lim \frac{\sin(k^{-2})}{k^{-2}} = 1 > 0$$

Luego,  $\sum k^{-2}$  converge  $\Rightarrow \sum \sin k^{-2}$  también.

b) Nos serviremos de un límite conocido.

$$\lim \frac{\ln(k^{-2}(k^2 + 1))}{k^{-2}} = \lim \frac{\ln(1 + k^{-2})}{k^{-2}} = 1 > 0$$

Luego,  $\sum k^{-2}$  converge  $\Rightarrow \sum \ln(k^{-2}(k^2 + 1))$  también.

c) Notemos primero que, cuando  $n$  crece mucho,  $a_n = (\sqrt{n}(1 + \sqrt{n}))^{-1}$  se va pareciendo mucho a  $(\sqrt{n}\sqrt{n})^{-1} = n^{-1}$ . En efecto

$$\lim \frac{(\sqrt{k}(1 + \sqrt{k}))^{-1}}{k^{-1}} = \lim \frac{k}{k + \sqrt{k}} = \lim \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{k}}} = 1 > 0$$

Luego,  $\sum k^{-1}$  diverge  $\Rightarrow \sum a_k$  también.

d) Nos serviremos del límite conocido para  $\sin(x)$ .

$$\lim \frac{\tan(k^{-2})}{k^{-2}} = \lim \left( \frac{\sin(k^{-2})}{k^{-2}} \right) \frac{1}{\cos(k^{-2})} = 1 > 0$$

Luego,  $\sum k^{-2}$  converge  $\Rightarrow \sum \tan(k^{-2})$  también.

e) Nos serviremos de un límite conocido.

$$\lim \frac{(k(k)^{1/k})^{-1}}{k^{-1}} = \lim \frac{1}{k^{1/k}} = \lim \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1 > 0$$

Luego,  $\sum k^{-1}$  diverge  $\Rightarrow \sum (k(k)^{1/k})^{-1}$  también.

f)

$$\sqrt{k^2 + k} - k = \frac{(k^2 + k) - k^2}{\sqrt{k^2 + k} + k} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + k} + k} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{k}}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Luego, como no converge a cero,  $\sum \sqrt{k^2 + k} - k$  diverge.

**E7.** Para  $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ , como  $a_k \geq 0$ , basta notar que  $\frac{a_k}{1+a_k} \leq a_k$  y recordar que  $\sum a_k$  converge, por lo que se tiene la convergencia por mayoración.

Para  $\sum \frac{a_k}{1-a_k}$ , recordemos que la convergencia de  $\sum a_k$  implica que  $a_k \rightarrow 0$ . Luego, por comparación por cociente tenemos:

$$\lim \frac{\frac{a_k}{1-a_k}}{a_k} = \lim \frac{1}{1-a_k} = 1 > 0$$

Luego,  $\sum a_k$  converge  $\Rightarrow \sum \frac{a_k}{1-a_k}$  también.

**E8.** Procedamos por el criterio de la raíz n-ésima.

a)

$$\lim \left( \frac{1}{e^{\sqrt{k^2+k}}} \right)^{1/k} = \lim \frac{1}{e^{\sqrt{1+\frac{1}{k}}}} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{converge.}$$

b)

$$\lim \left( q^k k^\alpha \right)^{1/k} = \lim q (\sqrt[k]{k})^\alpha = q \cdot 1^\alpha = q < 1 \Rightarrow \text{converge.}$$

c)

$$\lim \left( \frac{a^k}{k^k} \right)^{1/k} = \lim \frac{a}{k} = 0 < 1 \Rightarrow \text{converge.}$$

**E9.**

a)

$$\left| \frac{\cos(k^k)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2} \text{ que converge, luego } \sum \left| \frac{\cos(k^k)}{k^2} \right| \text{ converge.}$$

b)

$$\left| (-1)^k \frac{1}{k^\alpha} \right| = \frac{1}{k^\alpha} \text{ conocidamente convergente para } \alpha > 1.$$

c)

$$\left| (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!} \right| = \frac{(k!)^2}{(2k)!} = a_k$$

Veamos por criterio de cociente.

$$\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim \frac{((k+1)!)^2}{(2k+2)!} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \lim \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} = \lim \frac{k+1}{4k+2} = \frac{1}{4} < 1$$

Luego  $a_k$  converge y por ende  $\sum (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!}$  es absolutamente convergente.

**E10.** Usando el criterio de la raíz n-ésima, tenemos:

$$\lim |a^k k^a|^{1/k} = \lim |a| (\sqrt[k]{k})^a = |a| \cdot 1^a = |a|$$

De donde

$$\begin{aligned} |a| < 1 &\Rightarrow \sum |a^k k^a| \text{ converge.} \\ |a| > 1 &\Rightarrow \sum |a^k k^a| \text{ diverge.} \end{aligned}$$

Para el caso  $|a| = 1$  tenemos que  $\sum |a^k k^a| = \sum k^a$ , que diverge tanto para  $a = 1$  como para  $a = -1$ . Luego,  $\sum a^k k^a$  converge absolutamente solamente para  $a \in (-1, 1)$ .

**E11.** Es aplicación directa del criterio de Leibnitz. En efecto:

a) Es inmediato que  $a_k = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \rightarrow 0$ . Además,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} \leq \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+1}} = 1 \Rightarrow a_{k+1} \leq a_k$$

Luego, como  $a_k$  converge a cero y es decreciente, por Leibnitz  $\sum (-1)^k a_k$  converge.

b) Análogamente al anterior,  $a_k = \sin(1/k) \rightarrow 0$  y

$$\frac{d}{dx} \sin(1/x) = \frac{-\cos(1/x)}{x^2}$$

Expresión negativa cuando  $x \geq 1$ , con lo que  $\sin(1/x)$  decrece para esos valores de  $x$ . Luego,  $a_k$  decrece, y por Leibnitz  $\sum (-1)^k a_k$  converge.

**P1.**

a) El Hint debería decir (se invita a confirmarlo simplemente separando en fracciones parciales):

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$$

Siguiendo con la resolución del problema, basta notar que:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} \leq \frac{1}{k^3}$$

Donde  $\sum \frac{1}{k^3}$  es conocidamente convergente. Luego nuestra serie es convergente, y para calcular su valor notemos que (usando el Hint):

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \\ &= \frac{1}{2k} - \left( \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+1)} \right) + \frac{1}{2(k+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \left( \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) \right] \end{aligned}$$

Es decir, tenemos dos telescópicas. Se sigue entonces que:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) + \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

Y tomando el límite se llega a:

$$\sum \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

b) Sea la serie  $\sum \frac{e^k}{k^k}$ . Por el criterio de la raíz n-ésima tenemos:

$$\lim \left( \frac{e^n}{n^n} \right)^{1/n} = \lim \frac{e}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \sum \frac{e^k}{k^k} \text{ converge.}$$

Luego, por el criterio de la integral impropia, esto equivale a la convergencia de  $\int_1^\infty \frac{e^y}{y^y}$ .

c) Notemos en primer lugar que  $\frac{2k+1}{k(k+1)} \rightarrow 0$ . Además es decreciente. En efecto veamos que:

$$a_k - a_{k+1} = \frac{2k+1}{k(k+1)} - \frac{2k+3}{(k+1)(k+2)} = \frac{2k+2}{k(k+1)(k+2)} \geq 0 \Rightarrow a_k \geq a_{k+1}$$

Luego, por Leibnitz  $\sum (-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)}$  converge. Veamos ahora la convergencia absoluta. Esto es, ver si  $\sum \frac{2k+1}{k(k+1)}$  converge.

Note que cuando  $k$  crece mucho,  $a_k = \frac{2k+1}{k(k+1)}$  se va pareciendo mucho a  $\frac{2k}{k^2} = \frac{2}{k}$ . En efecto, comparando tenemos que:

$$\lim \frac{\frac{2k+1}{k(k+1)}}{1/k} = \lim \frac{2k+1}{k+1} = 2 > 0$$

Luego, como  $\sum 1/k$  diverge, se tiene que  $\sum \frac{2k+1}{k(k+1)}$  también.

En conclusión,

$$\sum (-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)} \text{ es condicionalmente convergente.}$$

**P2.**

- a) (a1) Notemos que  $e^{pn} > 0$ ,  $\forall p \in \mathbb{R}$ , por lo que podemos usar criterios para series de términos no negativos. Luego (*recuerde que  $e^p$  es una constante*):

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{e^{pn+p}n!}{e^{pn}(n+1)!} = \lim \frac{e^p}{n+1} = 0 < 1$$

Por lo tanto, por el criterio del cociente,  $\sum \frac{e^{pn}}{n!}$  converge  $\forall p \in \mathbb{R}$ .

(a2) Notemos que:

$$\left(1 + \frac{10}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1 + \frac{10}{n}\right)^n\right)^n \leq (e^{10})^n = e^{10n}$$

Esto puesto que se vió en el curso anterior que, para  $x \in \mathbb{R}$ , la sucesión  $a_n$  dada por:

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Es convergente con límite  $e^x$ , correspondiente al supremo del conjunto:

$$A = \left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

Dicho esto, tenemos que:

$$\frac{\left(1 + \frac{10}{n}\right)^{n^2}}{n!} \leq \frac{e^{10n}}{n!}$$

Como vimos en la parte (a1), tomando  $p = 10$  se tiene que  $\sum \frac{e^{10n}}{n!}$  converge, y por lo tanto

$$\sum \frac{\left(1 + \frac{10}{n}\right)^{n^2}}{n!} \text{ converge por mayoración.}$$

b)

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x), \quad x \geq 0$$

(b1) Es fácil ver que  $f(n) \rightarrow 0$ , puesto que  $\arctan(n) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Veamos que  $f(n)$  es decreciente:

$$f(n) - f(n+1) = \arctan(n+1) - \arctan(n)$$

Pero  $\arctan(x)$  es creciente. Luego  $\arctan(n+1) - \arctan(n) \geq 0 \Rightarrow f(n) \geq f(n+1)$ . Es decir,  $f(n)$  es decreciente. Por el criterio de Leibnitz se concluye que:

$$\sum (-1)^n f(n) \text{ converge.}$$

(b2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}{\frac{1}{x}} \\ &\xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1 \end{aligned}$$

Veamos que  $\sum (-1)^n f(n)$  no converge absolutamente. Se tiene que  $|(-1)^n f(n)| = f(n)$ , y por comparación tenemos:

$$\lim \frac{f(n)}{1/n} = \lim n f(n) = 1 > 0$$

Luego, como  $\sum 1/n$  diverge, tenemos que  $\sum |(-1)^n f(n)| = \sum f(n)$  diverge, por lo que  $\sum (-1)^n f(n)$  no converge absolutamente.

### P3.

a) Por el criterio de la raíz  $n$ -ésima, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim \left( \left( \frac{k}{k+1} \right)^{k^2} \right)^{1/k} &= \lim \left( \frac{k}{k+1} \right)^k = \lim \frac{1}{\left( \frac{k+1}{k} \right)^k} \\ &= \lim \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{k} \right)^k} = \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

Luego

$$\sum \left( \frac{k}{k+1} \right)^{k^2} \text{ converge.}$$

b) Veamos que  $\sqrt{(k-1)!} = \sqrt{1}\sqrt{2}\dots\sqrt{k-1}$ . Esto lo abreviamos como:

$$\sqrt{(k-1)!} = \prod_{j=1}^{k-1} \sqrt{j}$$

Luego:

$$\frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{j=1}^k (1 + \alpha\sqrt{j})} = \frac{\prod_{j=1}^{k-1} \sqrt{j}}{(1 + \alpha\sqrt{k}) \left( \prod_{j=1}^{k-1} (1 + \alpha\sqrt{j}) \right)} = \frac{1}{1 + \alpha\sqrt{k}} \left( \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\sqrt{j}}{1 + \alpha\sqrt{j}} \right)$$

Como se cumple que

$$\frac{1}{1 + \alpha\sqrt{k}} \leq 1 \quad \frac{\sqrt{j}}{1 + \alpha\sqrt{j}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{j}} + \alpha} \leq \frac{1}{\alpha}$$

Tenemos el siguiente acotamiento:

$$\frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{j=1}^k (1 + \alpha\sqrt{j})} \leq \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha} = \left( \frac{1}{\alpha} \right)^{k-1}$$

Gracias a que  $\alpha > 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} < 1$ , tenemos que  $\sum \left( \frac{1}{\alpha} \right)^{k-1}$  converge. Finalmente, por mayoración de series se concluye que:

$$\sum \frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{j=1}^k (1 + \alpha\sqrt{j})} \text{ converge para } \alpha > 1.$$

c) Usando la indicación, demostraremos que  $\arctan(x) \leq x$ ,  $\forall x \geq 0$ . Para ello sea la función

$$f(x) = \arctan(x) - x$$

Cuya derivada vale:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2} \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego  $f(x)$  es decreciente en todo  $\mathbb{R}$ . De ello se concluye que:

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0)$$

Pero (puesto que  $f(0) = 0$ )  $f(x) \leq f(0)$  significa que  $\arctan(x) - x \leq 0$ . Luego hemos probado que

$$\arctan(x) \leq x, \quad \forall x \geq 0$$

Usando esto tenemos que:

$$\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) \leq \frac{1}{1+k+k^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Donde  $\sum \frac{1}{k^2}$  es convergente. Se sigue finalmente que

$$\sum \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) \text{ converge.}$$

# SOLUCIÓN APUNTE MA1002

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### SEMANA 15

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas  
Use este material con responsabilidad.

**E1.**

a)  $a_n = \frac{x^{2n+1}}{n!}$

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{|x|^{2n+3} n!}{|x|^{2n+1} (n+1)!} = \lim \frac{x^2}{n+1} = 0 < 1$$

Luego, por el criterio del cociente,  $\sum a_n$  converge independientemente del valor de  $x$ , por lo que  $R = \infty$ ,  $I = \mathbb{R}$ .

b)  $a_n = \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{|x|^{n+1} \sqrt{n^2+3}}{|x|^n \sqrt{n^2+2n+4}} = |x| \lim \sqrt{\frac{n^2+3}{n^2+2n+4}} = |x|$$

Luego, por el criterio del cociente, converge si  $|x| < 1$  y diverge si  $|x| > 1$ , por lo que  $R = 1$ .

- **Caso  $x = 1$ :**  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ . Notemos que  $\sqrt{n^2+3}$  es similar a  $\sqrt{n^2} = n$  hacia el  $\infty$ . En efecto:

$$\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}}{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt{\frac{n^2}{n^2+3}} = 1 > 0$$

Luego, por comparación por cociente, la serie diverge.

- **Caso  $x = -1$ :**  $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$ . Es fácil ver que  $|a_n|$  es decreciente. En efecto,

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{n^2+2n+4}} \leq \frac{\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{n^2+3}} = 1$$

Además, es directo ver que  $|a_n| \rightarrow 0$ , por lo que se tiene la convergencia de  $\sum a_n$  por Leibnitz.

Finalmente  $I = [-1, 1)$ .

c)  $a_n = \frac{x^n \sqrt{n}}{3^n}$

Usamos el criterio de la raíz  $n$ -ésima:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{|x|}{3} \lim \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \frac{|x|}{3} \Rightarrow R = 3$$

- **Caso  $x = 3$ :**  $a_n = \sqrt{n}$  que no converge a cero por lo que la serie diverge.
- **Caso  $x = -3$ :**  $a_n = (-1)^n \sqrt{n}$  que tampoco converge a cero por lo que la serie diverge.

Finalmente  $I = (-3, 3)$ .

d)  $a_n = x^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Usamos el criterio de la raíz  $n$ -ésima:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = |x| \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = |x| \Rightarrow R = 1$$

- **Caso  $x = 1$ :**  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \neq 0$ , por lo que la serie diverge.
- **Caso  $x = -1$ :**  $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Ya se vió que  $|a_n| \not\rightarrow 0$ , por lo que  $a_n$  tampoco converge a cero y luego la serie diverge.

Finalmente  $I = (-1, 1)$ .

e)  $a_n = \frac{x^n}{n^\alpha}$

Usamos el criterio de la raíz  $n$ -ésima:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = |x| \lim \left( \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right)^\alpha = |x| \Rightarrow R = 1$$

- **Caso  $x = 1$ :**  $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ . Sabemos que converge para  $\alpha > 1$ . Veamos que para  $0 < \alpha \leq 1$  diverge. En efecto,

$$\begin{aligned} 0 < \alpha \leq 1 &\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{\alpha} \\ &\Rightarrow n \leq n^{1/\alpha} \quad / ( )^\alpha, \text{ función creciente.} \\ &\Rightarrow n^\alpha \leq n \\ &\Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Como  $\sum 1/n$  diverge, se tiene por mayoración que  $\sum 1/n^\alpha$  también. Además, si  $\alpha \leq 0$ ,  $1/n^\alpha = n^{-\alpha}$  que no converge a cero. Luego si  $\alpha \in (-\infty, 1]$  la serie diverge.

- **Caso  $x = -1$ :**  $a_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ . Como para  $\alpha > 0$ ,  $1/n^\alpha$  decrece y converge a cero, se tiene por Leibnitz que la serie converge. Para  $\alpha \leq 0$  basta notar que  $a_n = (-1)^n n^{-\alpha} \not\rightarrow 0$ , por lo que la serie diverge.

En resumen, dependiendo del valor de  $\alpha$  tenemos que:

- $\alpha \in (-\infty, 0] \Rightarrow I = (-1, 1)$
- $\alpha \in (0, 1] \Rightarrow I = [-1, 1)$
- $\alpha \in (1, \infty) \Rightarrow I = [-1, 1]$

f)  $a_n = (-1)^n x^{2n+1}$

Como  $x^{2n+1}$  es decreciente y convergente a cero para  $|x| < 1$ , por Leibnitz se concluye la convergencia de la serie. Para  $|x| > 1$  basta ver que  $a_n \not\rightarrow 0$  por lo que diverge. Por lo tanto  $R = 1$ .

- **Caso  $x = 1$ :**  $a_n = (-1)^n$ , que no converge a cero, por lo que la serie diverge.
- **Caso  $x = -1$ :**  $a_n = (-1)^n (-1)^{2n+1} = (-1)^n (-1) = (-1)^{n+1}$ , análogo al caso anterior.

Finalmente  $I = (-1, 1)$ .

g)  $a_n = \frac{x^n}{2n+1}$

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{|x|^{n+1}(2n+1)}{|x|^n(2n+3)} = |x| \lim \frac{2n+1}{2n+3} = |x| \Rightarrow R = 1$$

- **Caso  $x = 1$ :**  $a_n = \frac{1}{2n+1}$ . Notemos que hacia  $\infty$ ,  $2n+1$  es similar a  $2n$ . En efecto,

$$\lim \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n}} = \lim \frac{2n}{2n+1} = 1 > 0$$

Luego, como  $\sum \frac{1}{2k}$  diverge, nuestra serie también.

- **Caso  $x = -1$ :**  $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ . Como  $|a_n|$  decrece y converge a cero, la serie converge por Leibnitz.

Finalmente  $I = [-1, 1)$ .

h)  $a_n = x^n \frac{1+\sin(n)}{n}$ . PENDIENTE

i)  $a_n = x^n \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ .

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{x^{n+1} \frac{(n+3)(n+2)}{2}}{x^n \frac{(n+2)(n+1)}{2}} = |x| \lim \frac{n+3}{n+1} = |x| \Rightarrow R = 1$$

- **Caso  $x = 1$ :**  $a_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ , que no converge a cero por lo que la serie diverge.
- **Caso  $x = -1$ :**  $a_n = (-1)^n \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ , que no converge a cero por lo que la serie diverge.

Finalmente  $I = (-1, 1)$ .

j)  $a_n = \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right)x^n \quad a > b > 0$

$$p_n = \frac{a^n x^n}{n} \quad q_n = \frac{b^n x^n}{n^2}$$

Notemos que  $\sum (ax)^n$  y  $\sum (bx)^n$  poseen  $R$  igual a  $1/a$  y  $1/b$  respectivamente. Por la proposición 10,2, se tiene que

$$R(p_n) = \frac{1}{a} \quad R(q_n) = \frac{1}{b}$$

Luego tenemos que para

$$R = \min \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right\} = \frac{1}{a}$$

Tanto  $p_n$  como  $q_n$  convergen. Luego  $R(a_n) = 1/a$ .

- **Caso  $x = 1/a$ :**

$$a_n = \frac{1}{n} + \left(\frac{b}{a}\right)^n \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n}$$

Como  $\sum 1/n$  diverge, nuestra serie diverge por mayoración.

- **Caso  $x = -1/a$ :**

$$a_n = (-1)^n \left( \frac{1}{n} + \left(\frac{b}{a}\right)^n \frac{1}{n^2} \right)$$

Sabemos que tanto  $n^{-1}$  como  $n^{-2}$  son decrecientes. Además, como  $a > b > 0$ , tenemos que  $(b/a)^n$  es decreciente. Luego  $|a_n|$  es decreciente y además es nula. Luego por Leibnitz converge.

Finalmente  $I = [-\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$ .

**E2.** Se resuelve en P4.

**E3.** Notemos en primer lugar que, haciendo  $u = \sin(t) \rightarrow du = \cos(t)dt$ , tenemos:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{1 - x \sin^2(t)} dt = \int_0^1 \frac{du}{1 - xu^2}$$

Tenemos por hipótesis que  $|x| < 1$ , además  $|u^2| = |\sin^2(t)| \leq 1$ , por lo que  $|xu^2| < 1$ . Usando la indicación se sigue que:

$$\frac{1}{1 - xu^2} = \sum (xu^2)^k = \sum x^k u^{2k} \quad |x| < 1$$

Además,

$$\int_0^p \left( \sum x^k u^{2k} \right) du = \sum \frac{x^k p^{2k+1}}{2k+1}$$

Juntando todos nuestros resultados (note que nos interesa el caso  $p = 1$ ) concluimos que, para  $|x| < 1$ :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{1 - x \sin^2(t)} dt = \int_0^1 \frac{du}{1 - xu^2} = \int_0^1 \left( \sum x^k u^{2k} \right) du = \sum \frac{x^k}{2k+1}$$

**P1.**

a) Es análogo al ejercicio E1.j. Tomando  $u = x - 1$ , vimos que la serie:

$$\sum \left( \frac{a^k}{k} + \frac{b^k}{k^2} \right) u^k \quad a > b > 0$$

Converge para  $u \in [-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]$ . Luego, como  $u = x - 1$ , se tiene que la serie converge si:

$$x \in \left[ 1 - \frac{1}{a}, 1 + \frac{1}{a} \right)$$

b) El razonamiento es similar al hecho en el ejercicio E3. Usando la indicación, obtenemos que:

$$\frac{1}{1 + a^2 t^2} = \sum (-1)^k (a^2 t^2)^k = \sum (-1)^k a^{2k} t^{2k}$$

De donde:

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 + a^2 t^2} = \int_0^1 \left( \sum (-1)^k a^{2k} t^{2k} \right) dt = \sum (-1)^k \frac{a^{2k} 1^{2k+1}}{2k+1} = \sum (-1)^k \frac{a^{2k}}{2k+1}$$

c) Notemos, por otro lado, que si  $a \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{dt}{1 + a^2 t^2} \quad u = at \rightarrow du = a dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan(u) \Big|_0^a \\ &= \frac{\arctan(a)}{a} \end{aligned}$$

Juntando esto con la parte (b), tenemos:

$$\frac{\arctan(a)}{a} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + a^2 t^2} = \sum (-1)^k \frac{a^{2k}}{2k+1}$$

Notemos además que podemos ampliar el resultado a  $a = 0$ . En efecto,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\arctan(a)}{a} \xrightarrow{L'H} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{1 + a^2} = 1$$

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{a^{2k}}{2k+1} = 1 + \left( \sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{a^{2k}}{2k+1} \right) \xrightarrow{a=0} 1 + 0 = 1$$

Luego, definiendo por continuidad  $\frac{\arctan(a)}{a} = 1$  cuando  $a = 0$ , también se cumple la igualdad.

**P2.**

a) Por la proposición 10.2 sabemos que  $R = 1$ , ya que  $R(\sum x^k) = 1$ .

- **Caso  $x = 1$ :**  $a_n = \frac{1}{n}$  conocidamente divergente.
- **Caso  $x = -1$ :**  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ , convergente por Leibnitz (puesto que  $|a_n|$  decrece y tiende a cero).

Luego  $I = [-1, 1)$ .

b) Sea  $h(x) = \sum \frac{1}{k} x^k$  y  $g(x) = \frac{x}{1-x}$ . Luego

$$\sum \frac{1}{k} \left( \frac{x}{1-x} \right)^k = (h \circ g)(x)$$

Como  $\text{Dom}(h) = [-1, 1)$ , necesitamos que  $\left| \frac{x}{1-x} \right| < 1$ . Luego:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{x}{1-x} \right| < 1, x \neq 1 \\ \Leftrightarrow & |x| < |1-x| \\ \Leftrightarrow & |x| < 1-x \vee |x| < x-1 \\ \Leftrightarrow & x-1 < x < 1-x \vee 1-x < x < x-1 \end{aligned}$$

Pero siempre se tiene que  $x-1 < x$ , y, en consecuencia, nunca se tiene  $x < x-1$ . Luego las desigualdades se reducen a:

$$x < 1-x$$

Lo que se cumple para  $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ .

c) Tomando las mismas funciones  $h$  y  $g$  definidas anteriormente, tenemos que  $f = h \circ g$ . Recordemos que la función solo está definida para el dominio encontrado en la parte anterior. En particular, recuerde que  $\left| \frac{x}{1-x} \right| < 1$ . Luego derivando tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(g(x))g'(x) \\ &= \left( \sum \left( \frac{x}{1-x} \right)^{k-1} \right) \left( \frac{1}{(1-x)^2} \right) \\ &= \left( \lim \frac{1 - \left( \frac{x}{1-x} \right)^n}{1 - \left( \frac{x}{1-x} \right)} \right) \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{(1-x)(1-2x)} \end{aligned}$$

Luego tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-x)(1-2x)} \\ \int_0^x f'(t) dt &= \int_0^x \frac{dt}{(1-t)(1-2t)} \\ f(t) \Big|_0^x &= \int_0^x \left( \frac{2}{1-2t} - \frac{1}{1-t} \right) dt \\ f(x) &= -\ln|1-2x| + \ln|1-x| \Big|_0^x \\ f(x) &= \ln \left| \frac{1-x}{1-2x} \right| \end{aligned}$$

Pero  $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \Rightarrow 2x \in (-\infty, 1)$ , por lo que tanto  $1-x$  como  $1-2x$  son positivos. Finalmente

$$f(x) = \ln \left( \frac{1-x}{1-2x} \right) \quad , x \in (-\infty, \frac{1}{2})$$

### P3.

- a) Para  $\sum \frac{(-1)^k}{k \ln(k)}$  basta ver que  $\frac{1}{k \ln(k)} \rightarrow 0$  y es decreciente, por lo que converge por Leibnitz. Para  $\sum \frac{1}{k \ln(k)}$  veamos la integral impropia correspondiente. Notemos que:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln(x)} = \ln(\ln(x)) \Big|_2^\infty = \infty \text{ diverge.}$$

Luego la serie diverge por el criterio de la integral impropia.

- b) Notemos que aplicando el criterio del cociente se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} &= |x| \lim \frac{k \ln(k)}{(k+1) \ln(k+1)} \\ &\xrightarrow{L'H} |x| \lim \frac{1 + \ln(k)}{1 + \ln(k+1)} \\ &\xrightarrow{L'H} |x| \lim \frac{k+1}{k} = |x| \end{aligned}$$

Que resulta en convergencia para  $|x| < 1$  y en divergencia para  $|x| > 1$ . El radio de convergencia es entonces  $R = 1$ . Adicionalmente vemos que, usando lo visto en (a), el intervalo de convergencia es  $[-1, 1)$ .

c)  $f(x) = \sum \frac{x^k}{k(k+1)}$

(c1) Recordemos que  $\sum |x|^k$  posee  $R = 1$ , lo mismo para  $\sum \frac{|x|^k}{k^2}$  por la proposición 10.2. Esta última serie es muy similar a  $f(x)$ . En efecto vea que, por el criterio de comparación por cociente:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^k}{k(k+1)}}{\frac{|x|^k}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{k(k+1)} = 1 > 0$$

Por lo que las series se comportan igual. En conclusión, el radio de convergencia de  $f(x)$  es  $R = 1$ .

(c2) Para  $x \in (-1, 1)$  tenemos que:

$$\begin{aligned} (xf(x))'' &= \left( \sum \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \right)'' = \left( \sum \frac{x^k}{k} \right)' = \sum x^{k-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} \end{aligned}$$

(c3) Por simple evaluación en  $x = 0$  vemos que  $xf(x) = (xf(x))' = 0$ . Según lo calculado en la parte anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} (1) \int_0^x (tf(t))'' dt &= (tf(t))' \Big|_0^x = (xf(x))' \\ (2) \int_0^x (tf(t))'' dt &= \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x) \end{aligned}$$

De donde concluimos que  $(xf(x))' = -\ln(1-x)$ . Repitiendo el mismo razonamiento tenemos:

$$\begin{aligned} (1) \int_0^x (tf(t))' dt &= tf(t) \Big|_0^x = xf(x) \\ (2) \int_0^x (tf(t))' dt &= \int_0^x -\ln(1-t) dt \quad ; u = 1-t \rightarrow du = -dt \\ &= \int_1^{1-x} \ln(u) = u(\ln(u) - 1) \Big|_1^{1-x} \\ &= (1-x)(\ln(1-x) - 1) + 1 \end{aligned}$$

De donde concluimos que  $xf(x) = (1-x)(\ln(1-x) - 1) + 1$ . Tomando  $x \neq 0$  se concluye lo pedido:

$$f(x) = \frac{1 + (1-x)(\ln(1-x) - 1)}{x}$$

**P4.**

- a) Para  $|x| < 1$  es claramente convergente por Leibnitz. Además en  $x = 1$  la serie es divergente puesto que  $(-1)^k \not\rightarrow 0$ . Luego, para  $|x| > 1$  la serie diverge y  $R = 1$ .

**Caso  $x = -1$ :**  $\sum (-1)^n (-1)^{2n} = \sum (-1)^n$  divergente.

Luego  $I = (-1, 1)$ . Con  $x \in I$  es sencillo encontrar la función asociada resolviendo la sumatoria geométrica.

$$\sum_0^n (-1)^k x^{2k} = \sum_0^n (-x^2)^k = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 + x^2}$$

Como  $|x| < 1 \Rightarrow |-x^2| < 1$ , se tiene sacando el límite que:

$$\sum (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad |x| < 1$$

- b) Notemos de la parte anterior que nuestra serie resulta ser igual a  $\frac{1}{1+x^2}$ , que es justamente la derivada de  $\arctan(x)$ . Veamos entonces que:

$$(1) \int_0^x \sum (-1)^n t^{2n} dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(x)$$

$$(2) \int_0^x \sum (-1)^n t^{2n} dt = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Se concluye que para  $|x| < 1$  se cumple

$$\arctan(x) = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

- c) Es inmediato intentar usar la parte (b) para relacionar  $\pi$  con alguna serie. Recordemos que necesitamos que  $|x| < 1$ . Podríamos usar  $x = 1/\sqrt{3}$  en donde la arcotangente vale  $\pi/6$ . Luego

$$\pi = 6 \arctan(1/\sqrt{3})$$

Y reemplazando en la serie encontrada:

$$\pi = 6 \sum \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{2n+1} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 2\sqrt{3} \sum \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$$

**P5.**

a)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right)$$

Veamos el desarrollo en serie de potencias de  $\frac{1}{x-1}$  y  $\frac{1}{x+2}$  (centradas en cero). Para ello ocuparemos dos métodos.

**Encontrar las series de Taylor en cero:**

(1)  $g(x) = \frac{1}{x-1}$ . Derivando encontramos que:

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-1)^{-1} \\ g(x)' &= (-1)(x-1)^{-2} \\ g(x)'' &= (-1)(-2)(x-1)^{-3} \\ &\vdots \\ g^{(k)}(x) &= (-1)(-2)\dots(-k)(x-1)^{-(k+1)} = \frac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}} \end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$\begin{aligned} g^{(k)}(0) &= \frac{(-1)^k k!}{(-1)^{k+1}} = -k! \\ g(x) &= \sum \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum -x^k, \quad R_g = 1 \end{aligned}$$

(2)  $h(x) = \frac{1}{x+2}$ . Puesto que  $(x-1)' = (x+2)' = 1$ , la derivación es totalmente análoga, por lo que:

$$\begin{aligned} h^{(k)}(x) &= \frac{(-1)^k k!}{(x+2)^{k+1}} \\ h^{(k)}(0) &= \frac{(-1)^k k!}{2^{k+1}} \\ h(x) &= \sum \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum (-1)^k \frac{x^k}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

Donde por Leibnitz es directo que converge por lo menos para  $(-1, 1)$ . Por lo tanto, la suma de estas series tiene  $R = 1$  y resulta en:

$$f(x) = \frac{1}{3} \left( \sum -x^k - \sum (-1)^k \frac{x^k}{2^{k+1}} \right) = \sum \frac{1}{3} \left( \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} - 1 \right) x^k$$

**Encontrar las series por medio de la serie geométrica:**

Para esto recordamos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad R = 1$$

Luego tenemos que:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{1-x} = -\sum x^k, \quad R_g = 1 \\ h(x) &= \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} \\ &= \frac{1}{2} \sum \left(-\frac{x}{2}\right)^k = \sum (-1)^k \frac{x^k}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

Determinar el radio de la serie de  $h(x)$  es directo al notar que el paso a la suma geométrica necesita que:

$$\left| -\frac{x}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Rightarrow R_h = 2$$

Por lo tanto la suma de las series converge para el radio menor, es decir,  $R = 1$ . Concluimos el mismo resultado:

$$f(x) = \frac{1}{3} \left( \sum -x^k - \sum (-1)^k \frac{x^k}{2^{k+1}} \right) = \sum \frac{1}{3} \left( \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} - 1 \right) x^k$$

Para el Intervalo de Convergencia, estudiemos los casos  $x = 1$  y  $x = -1$ .

**Caso**  $x = 1$ :

$$\frac{1}{3} \left( \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} - 1 \right) x^k = \frac{1}{3} \left( \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} - 1 \right) \not\rightarrow 0$$

Por lo tanto la serie no puede converger.

**Caso**  $x = (-1)$ :

$$\frac{1}{3} \left( \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} - 1 \right) x^k = \frac{1}{3} \left( \frac{(-1)^{k+1}(-1)^k}{2^{k+1}} - (-1)^k \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{-1}{2^{k+1}} - (-1)^k \right) \not\rightarrow 0$$

Por lo tanto la serie no puede converger. Se concluye que  $I = (-1, 1)$ .

b)

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1+2x)} = \frac{-1}{3} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1+2x} \right)$$

Por la parte (a) ya sabemos que  $\frac{1}{x-1} = \sum -x^k$  para  $x \in (-1, 1)$ . Para el otro término procedamos como antes:

### Encontrar la serie de Taylor en cero:

Derivando obtenemos:

$$\begin{aligned} g(x) &= (1+2x)^{-1} \\ g(x)' &= (-1)(1+2x)^{-2} \cdot 2 \\ g(x)'' &= (-1)(-2)(1+2x)^{-3} \cdot 2^2 \\ &\vdots \\ g^{(k)}(x) &= (-1)(-2) \dots (-k)(1+2x)^{-(k+1)} \cdot 2^k = \frac{(-1)^k 2^k k!}{(1+2x)^{k+1}} \end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$\begin{aligned} g^{(k)}(0) &= (-1)^k 2^k k! \\ g(x) &= \sum \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum (-1)^k 2^k x^k \\ R_g &= \frac{1}{\lim \sqrt[k]{|(-1)^k 2^k|}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Juntando ambas series con el radio menor  $R = \frac{1}{2}$  obtenemos:

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1+2x)} = \frac{-1}{3} \left( \sum -x^k + \sum (-1)^k 2^k x^k \right) = \sum \frac{1}{3} \left( (-1)^{k+1} 2^k + 1 \right) x^k$$

**Encontrar la serie por medio de la serie geométrica:**

$$g(x) = \frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = \sum (-2x)^k = \sum (-1)^k 2^k x^k$$

Donde el radio es directo de que para la suma geométrica necesitamos:

$$|-2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow R_g = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto la suma de las series converge para el radio menor, es decir,  $R = \frac{1}{2}$ . Concluimos el mismo resultado:

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1+2x)} = \frac{-1}{3} \left( \sum -x^k + \sum (-1)^k 2^k x^k \right) = \sum \frac{1}{3} \left( (-1)^{k+1} 2^k + 1 \right) x^k$$

Para el Intervalo de Convergencia, estudiemos los casos  $x = 1/2$  y  $x = -1/2$ .

**Caso**  $x = 1/2$ :

$$\frac{1}{3} \left( (-1)^{k+1} 2^k + 1 \right) x^k = \frac{1}{3} \left( (-1)^{k+1} 2^k + 1 \right) \left( \frac{1}{2} \right)^k = \frac{1}{3} \left( (-1)^{k+1} + \left( \frac{1}{2} \right)^k \right) \not\rightarrow 0$$

Por lo tanto la serie no puede converger.

**Caso**  $x = -1/2$ :

$$\frac{1}{3} \left( (-1)^{k+1} 2^k + 1 \right) x^k = \frac{1}{3} \left( (-1)^{k+1} 2^k + 1 \right) \left( \frac{-1}{2} \right)^k = \frac{1}{3} \left( -1 + \left( \frac{-1}{2} \right)^k \right) \not\rightarrow 0$$

Por lo tanto la serie no puede converger. Se concluye que  $I = (-1/2, 1/2)$ .

**Notas:**

- Note la facilidad para obtener series de expresiones de la forma  $\frac{A}{Bx+C}$  (donde  $A, B, C$  son constantes) utilizando la serie geométrica.
- Las series fueron comprobadas mediante WolframAlpha.