MA1001-2 Introducción al Cálculo. Semestre 2014-2
Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Nicolás Zalduendo V.

Guía de Problemas: Preparación Examen

Problemas

1. Considere la función f definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$. Se pide:

   a) Encontrar dominio, cero, signos, paridad y asíntotas de todo tipo.

   b) Demostrar que $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f)$

   $$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(x_1 - x_2)(1 + x_2 x_1)}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}$$

   Utilice este resultado para estudiar el crecimiento de f indicando en qué intervalos esta función es creciente y en cuales decreciente.

   c) Calcule $f((1,\infty))$ y pruebe que la función

   $$\begin{aligned} \overline{f} : (1,\infty) &\longrightarrow f((1,\infty)) \\ x &\mapsto \overline{f}(x) := f(x) \end{aligned}$$

   es biyectiva y determine su inversa.

   d) Bosqueje el gráfico de f.

2. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = \dfrac{|x| - 6}{|x| - 2}$. Se pide:

   a) Determine $A = \mathrm{Dom}(f)$, ceros, signos y paridad.

   b) Determine asíntotas verticales y horizontales, si es que existen.

   c) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f (puede aprovechar la paridad, si la hay).

   d) Determine $f(A)$, la imagen de A por f, y explique por qué f no es inyectiva ni sobreyectiva.

   e) Encuentre un subconjunto B de A de modo que $f|_B : B \longrightarrow f(B)$ sea biyectiva y determine explícitamente su inversa.

   f) Bosqueje el gráfico de f.

3. *a*) Considere la función f definida por:

   $$f(x) = \frac{1}{[x] + [-x]}$$

   donde $[x]$ denota la parte entera de x.
   Determine el dominio, recorrido y paridad de f. Bosqueje su gráfico.

b) Representar la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la cual se sabe lo siguiente:

(i) $g(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 4 - 2x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

(ii) g es impar.

(iii) g es periódica de período 4.

Justifique las etapas que utilice para la construcción del gráfico. Encuentre los ceros de g y su conjunto imagen.

c) Se dice que una función f es lineal si y sólo si:

(i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

(ii) $f(cx) = cf(x)$

para todo x, y en el dominio de f y para toda constante c.
Demuestre que la composición de funciones lineales es una función lineal.

4. Calcule si es que existen los límites de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \dfrac{1 + \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}$

b) $b_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n+2}$

c) $c_n = \left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)^n$

d) $d_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$

5. Demuestre que la sucesión (a_n) definida por:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

converge a un límite L comprendido entre $\dfrac{1}{2}$ y 1 (no lo calcule) y pruebe que (b_n) definida por:

$$b_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

converge al mismo límite que (a_n). Justifique sus respuestas.

6. Considere la sucesión (a_n) definida por:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{4 + a_n^2}{2}}$$

a) Demuestre que $1 \leq a_n < 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Demuestre que a_n es estrictamente creciente.

c) Justifique la convergencia de a_n y calcule su límite.

7. Se define (x_n) mediante:

$$x_{n+1} = \frac{2(1 + x_n)}{3 + x_n}$$

donde $x_1 > 0$ es conocido.

a) Muestre que si $x_n > 1$, entonces $1 < x_{n+1} < x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Concluya que si $x_1 > 1$, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente y calcule su límite.

8. *a*) Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1^+, \quad \lim_{u\to 1^+} f(u) = +\infty$$

Demuestre usando las definiciones (que usan ϵ, δ, M) que:

$$\lim_{x\to 0} (f \circ g)(x) = +\infty$$

b) Demuestre usando la definición que corresponda que:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \nexists$

9. *a*) Considere la función definida por:

$$f(x) = \frac{x + e^x}{x - e^x}$$

(i) Argumente por qué $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(ii) Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$. Explique el significado geométrico de estos límites, si es que existen.

(iii) Calcule $f'(x)$. Encuentre los ceros y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f'(x)$.

(iv) Deduzca la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcule las asíntotas de todo tipo de la función:

$$f(x) = x + \frac{\ln(e^x + 1)}{x}$$

10. *a*) Sea $f(x) = \operatorname{sen}^2(x) + 2\cos(x) + 1$. Determine dominio, ceros y paridad de $f(x)$ y $f'(x)$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes propiedades:

(I) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ f(a + b) = f(a) + f(b) + a^2b + ab^2$

(II) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

(i) Demuestre que $f(0) = 0$ y deduzca que f es una función impar.

(ii) Calcule $f'(0)$.

(iii) Calcule $f'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

11. *a*) Calcule, sin usar L'hopital, los siguientes límites:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\ln(1 + x^2)}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)}$

b) Para la función

$$f(x) = \frac{x^3 + 10x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

encuentre las asíntotas verticales y oblicuas si es que existen.

c) (i) Usando la definición calcule la derivada de $f(x) = a^x$ para $x = 0$, donde $a > 0$.

(ii) Considere $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x + y) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ y $f(0) = 1$. Demuestre que si f es derivable en 0, entonces lo es en todo $\mathbb{R}$.

12. *a*) Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación

$$e^{2\,\mathrm{arc\,sen}(xy)} = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

en el punto P donde la curva intersecta al eje X con abscisa positiva.

b) Derive las funciones:

(i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$ (ii) $g(x) = \dfrac{\ln(x)^x}{x^{\ln(x)}}$

c) Use, si corresponde, la regla de L'hopital para calcular los siguientes límites:

(i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n \ln(x)}{x^2 - 1}$ (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\cos(x) - \mathrm{sen}(x)}{x^2\,\mathrm{sen}(x)}$

13. Considere la función

$$f(x) = \cos(x)^{1+\mathrm{sen}(x)}$$

a) Determine el dominio de f.

b) Escriba el polinomio de Taylor de orden 2, en torno a $x_0 = 0$ para $f(x)$.

c) Calcule:

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x^2}$ (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x}$