MA1001-1 Introducción al Cálculo, Semestre Primavera
Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliar: Nicolás Tapia Rivas

Resumen Semanas 14 y 15

Derivadas

- Diremos que f es derivable o diferenciable en x_0 cuando existe el límite descrito por:
$$L = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
En tal caso, L se denominará la *derivada* de f en x_0 y se denotará por $f'(x_0)$.
- La interpretación principal de $f'(x_0)$ es representar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en x_0.
- La derivada solo se estudiará en aquellos puntos donde sea posible estudiar el límite. Es decir, en los puntos del dominio de f que estén *rodeados* de otros puntos del dominio. Estos puntos se llaman los *puntos interiores* de $\mathrm{Dom}(f)$ y cumplen con:
$$\exists \delta > 0, \text{ tal que } (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset \mathrm{Dom}(f)$$
- La función f' tal que asigna a cada $x \in \mathrm{Dom}(f)$ el valor $f'(x)$ (su derivada) se llama *función derivada* de f.
- **Álgebra de derivadas:** Si f y g son diferenciables en x_0, entonces las siguientes funciones también son diferenciables y su derivada en términos de f y g corresponden a:
  - $(f \pm g)' = f' \pm g'$
  - $(\alpha f)' = \alpha f',\ \alpha \in \mathbb{R}$
  - $(fg)' = f'g + fg'$
  - $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2},\ g \neq 0$
- Una función f es diferenciable en x_0 ssi existen m y $E : [-\delta,\delta]\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ (con $\delta > 0$ y $E(h) \to 0$ cuando $h \to 0$) tales que:
$$f(x_0+h) = f(x_0) + mh + hE(h),\ \forall h \in [-\delta,\delta]\backslash\{0\}$$
O equivalentemente, $\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]\backslash\{x_0\}$:
$$f(x) = f(x_0) + m(x-x_0) + (x-x_0)E(x-x_0)$$
Se puede demostrar que $m = f'(x_0)$, por lo tanto la expresión:
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$
Representa la *aproximación de primer orden* de f en torno a x_0. Esto se puede interpretar como sigue: la recta tangente a f por x_0 es la recta que mejor aproxima a la función cuando estamos suficientemente cerca de x_0, donde el error de la aproximación «$hE(h)$» no solo tiende a cero cuando $h \to 0$, sino que el *error relativo* «$E(h)$» también tiende a cero, por lo que el error se hace muy pequeño en las cercanías de x_0.
- Es directo de la aproximación de primer orden que si f es derivable en x_0, entonces f es continua es x_0. Es decir, que se cumple:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$
- **Regla de la cadena:** Sea f diferenciable en x_0 y g diferenciable en $f(x_0)$. Entonces $g \circ f$ es diferenciable en x_0 y su derivada es:
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$
- **Derivada de la función inversa:** Sea f una función biyectiva. Para su función inversa se tiene:
$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$
- **Derivación implícita:** Existen ecuaciones que relacionan las variables x e y de tal manera que definen alguna función $y = f(x)$ en algún intervalo de valores de x, pero en que no es posible despejar «y». Se dice que la ecuación en cuestión define en forma *implícita* a tal función. Sabiendo que existe tal función $y = f(x)$ en torno a $P(x_0, y_0)$, podemos encontrar la derivada en P derivando directamente ambos lados de la ecuación recordando que y es una función que debe ser derivada. El término «y'» puede ser entonces despejado en términos de x_0 e y_0, de modo que deben conocerse ambas coordenadas para determinar su valor.
- **Derivación logarítmica:** Se define el operador logarítmico $\mathcal{L}$ como:
$$\mathcal{L}(f) = \frac{f'}{f}$$
Se tienen las siguientes propiedades:
  - $\mathcal{L}(fg) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$
  - $\mathcal{L}(f/g) = \mathcal{L}(f) - \mathcal{L}(g)$
  - $\mathcal{L}(f^\alpha) = \alpha\mathcal{L}(f)$

  Además se tiene directamente que $f' = f \cdot \mathcal{L}(f)$. El operador solo es útil cuando la expresión es dominada por multiplicaciones, divisiones y potencias.

Derivadas de orden superior

- Para $n \in \mathbb{N}$ se define $f^{(n)}(x_0)$, *la derivada de orden n de f en x_0*, como el valor del siguiente límite cuando existe:
$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$$
Donde «$f^{(0)}(x_0)$» es la función f original.
- Cuando el límite anterior existe, decimos que f es n veces derivable en x_0. Si $f^{(n)}(x_0)$ existe, se tendrá:
$$\lim_{x\to x_0} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(x_0),\ \forall k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$$
- **Fórmula de Leibnitz:** Sean f y g n veces derivables en x_0. Entonces
$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$$
Por lo tanto, si conocemos las derivadas $n-$ésimas de f y g, podemos conocer la derivada $n-$ésima de su producto.
- **Polinomio de Taylor:** Para f una función n veces derivable en x_0, se tiene el polinomio de Taylor de f en torno a x_0 y de orden n dado por:
$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$$
Donde $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

- El polinomio de Taylor de orden 1 corresponde a la recta tangente, y si p es el polinomio de Taylor de orden n de f en torno a x_0, entonces p' es el polinomio de Taylor de orden $n-1$ de f' en torno a x_0.

Regla de l'Hôpital

Sean f y g derivables con $g'(x) \neq 0$ y $B = \{\pm\infty, x_0, x_0^{\pm}\}$.

- Si $\lim\limits_{x\to B} f(x) = \lim\limits_{x\to B} g(x) = 0$ entonces:

$$\lim_{x\to B} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to B} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

- Si $\lim\limits_{x\to B} f(x) = \lim\limits_{x\to B} g(x) = \pm\infty$ entonces:

$$\lim_{x\to B} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to B} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

- La regla puede ser usada tantas veces como se quiera, siempre y cuando se cumplan las hipótesis necesarias.

Funciones Hiperbólicas:

- Se define el *seno hiperbólico* y el *coseno hiperbólico* como:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- Se satiface la identidad $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$
- La tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólico se definen igual que sus análogos trigonométricos.

Cálculo de algunas derivadas típicas:

- $f(x) = c = \text{cte} \Rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$
- $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$
- $f(x) = \operatorname{senh}(x) \Rightarrow f'(x) = \cosh(x)$
- $f(x) = \cosh(x) \Rightarrow f'(x) = \operatorname{senh}(x)$
- $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln(a)$
- $f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\ln(a)}$
- $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$