MA1001-1 Introducción al Cálculo, Semestre Primavera
Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliar: Nicolás Tapia Rivas

Resumen Semanas 12 y 13

Límite de funciones

- Se dice que f tiende a $l \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a x_0, o que l es el límite de $f(x)$ cuando $x \to x_0$, cuando para cualquier sucesión x_n con valores en el dominio de la función tal que $x_n \neq x_0$ y $x_n \to x_0$ se verifica que $f(x_n) \to l$ (es decir, la sucesión de las imágenes converge a l).
- Dada la definición en base a sucesiones (y notando que $f(x_n)$ también es una sucesión), se heredan las propiedades de las sucesiones. En particular la unicidad del límite y álgebra de límites.
- Teorema del Sandwich de funciones: Sean f, g y h tres funciones. Entonces si $\exists \delta > 0$ tal que:
$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$
y además:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$
Entonces $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$.
- Límite para la composición de funciones: Supongamos que:
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l \ \wedge \ \lim_{y \to l} f(y) = L$$
Entonces, bajo algunas hipótesis bastante generales se tiene:
$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to l} f(y) = L$$
- El teorema anterior se usa como un teorema de cambio de variables para el cálculo de límites en el sentido de que si $f(x) \to u_0$ cuando $x \to x_0$:
$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)); \quad \begin{matrix} u = f(x) \\ u \to u_0 \end{matrix} \quad = \lim_{u \to u_0} g(u)$$
Donde la igualdad es válida cuando el último límite existe.
- Una función continua en $x = x_0$ es aquella que cumple con:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
Funciones continuas en sus respectivos dominios son, por ejemplo, los polinomios, las funciones racionales, las raíces, las funciones trigonométricas y sus inversas, la función exponencial y el logaritmo.
- Límite de una función a través de un subconjunto: Diremos que $l \in \mathbb{R}$ es el límite de la función f a través del conjunto B cuando $f(x_n) \to l$ para sucesiones $x_n \to x_0$ con valores en B. Esto se anota como
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} f(x) = l$$
- Cuando el límite global existe, entonces el límite a través de cualquier subconjunto del dominio de f existe y entrega el mismo valor.
- La contrarrecíproca de lo anterior nos dice que si el límite a través de un subconjunto no existe, o bien lo límites a través de dos subconjuntos son distintos entre sí, entonces el límite global no existe.
- Si los límites de f a través de ciertos subconjuntos del dominio B y C existen y ambos valen L, y además se cumple que $B \cup C = \mathrm{Dom}(f)$, entonces el límite global existe y vale L.
- Un caso particular muy importante son los llamados *límites laterales*. Supongamos que queremos estudiar el límite de f cuando $x \to x_0$:
  - El límite lateral de f *por la derecha* es el límite calculado a través de los valores de x que cumplen con $x > x_0$ (es decir, estar a la derecha de x_0 en la recta real). Este límite se denota por $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$.
  - El límite lateral de f *por la izquierda* es el límite calculado a través de los valores de x que cumplen con $x < x_0$ (es decir, estar a la izquierda de x_0 en la recta real). Este límite se denota por $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$.
- Por lo tanto, el límite de f en x_0 existe ssi los límites laterales existes y son iguales.
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$
- *Caracterización* $\varepsilon - \delta$: De modo de prescindir de las sucesiones para la definición de límite, tenemos que la expresión $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ es equivalente a:
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathrm{Dom}(f))$$
$$0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

Generalización del límite de funciones[1]

- Decimos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, cuando $f(x) \to L$ en la medida que hacemos crecer x indefinidamente (de una forma análoga a las sucesiones, en que $n \to \infty$). De forma análoga, decimos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ cuando $f(x) \to L$ en la medida que hacemos decrecer x indefinidamente.
- Esta forma de límite posee las mismas propiedades de unicidad, álgebra y Sandwich. Para el Sandwich se cambia la condición «$\exists \delta > 0,\ |x - x_0| \leq \delta \ldots$» (cercanía a un x_0) por «$\exists m > 0,\ x \geq m \ldots$» si $x \to \infty$ o por «$\exists m < 0,\ x \leq m \ldots$» si $x \to -\infty$.
- Decimos que $\lim_{x \to A} f(x) = \infty$ si cuando $x \to A$ se tiene que el valor de $f(x)$ crece sin cota (de modo que se hace tan grande como queramos), donde A puede ser un real o un infinito (en el sentido de la generalización anterior). De forma análoga, decimos que $\lim_{x \to A} f(x) = -\infty$ si cuando $x \to A$ se tiene que el valor de $f(x)$ decrece sin cota (de modo que se hace tan negativo como queramos).
- Esta forma de límite posee las mismas propiedades de unicidad y álgebra.
- Se tiene un análogo al Sandwich aquí: Si $f(x) \leq g(x)$ para los valores de x concernientes al límite, y se cumple que $f(x) \to +\infty$, entonces se tendrá que $g(x) \to +\infty$. De manera análoga y con el mismo enunciado, si $g(x) \to -\infty$ entonces se tendrá $f(x) \to -\infty$. Es decir, las funciones se *empujan* en el límite de modo que la otra no pueden sino comportarse de la misma manera no acotada.

[1] Para las definiciones formales de estas generalizaciones, consulte el apéndice «Definición de Límite».

- Cuando $f(x) \to L$, decimos que $f(x) \to L^+$ si lo hace de manera tal que $f(x) > L$, y decimos que $f(x) \to L^-$ si lo hace de manera tal que $f(x) < L$.
- El teorema de límite para una composición de funciones (o de cambio de variable) sigue siendo válido para las generalizaciones.

Asíntotas

- Las asíntotas de una función son rectas (horizontales, verticales u oblicuas) que la aproximan a grandes escalas.
- Asíntota horizontal: Decimos que la recta $y = l_1$ es asíntota horizontal de f cuando $x \to +\infty$ si se tiene que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l_1$. De manera análoga, decimos que la recta $y = l_2$ es asíntota horizontal de f cuando $x \to -\infty$ si se tiene que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_2$. Que f posea como asíntota horizontal a la recta $y = l$ significa que f se comporta como esta recta en el límite (se vuelven indistinguibles)
- Asíntota vertical: Decimos que la recta $x = x_0$ es una asíntota vertical de f cuando f *se dispara* si $x \to x_0$ por la derecha o por la izquierda. De una manera más específica, decimos que $x = x_0$ es asíntota vertical de f si $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.
- Asíntota oblicua: Decimos que la recta $y = m_1x + n_1$ es asíntota oblicua de f cuando $x \to +\infty$ si se tiene que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - (m_1x + n_1) = 0$. De manera análoga, decimos que la recta $y = m_2x + n_2$ es asíntota oblicua de f cuando $x \to -\infty$ si se tiene que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (m_2x + n_2) = 0$.

  Que f posea como asíntota oblicua a la recta $y = mx + n$ significa que f se comporta como esta recta en el límite (se vuelven indistinguibles).
- Note que solo basta que un límite lateral sea infinito para que $x = x_0$ se considere una asíntota vertical (no es necesario que sean ambos).
- Los candidatos a ser asíntota vertical de la función f son los puntos en que la función se indefine (por ejemplo: dividir por cero o calcular el logaritmo de cero).
- Las asíntotas horizontales pueden ser diferentes según $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$, o podría existir solo una de ellas (o ninguna, por supuesto), de modo que se deben revisar ambos infinitos.
- Note que nada prohíbe que una asíntota horizontal pueda ser *cortada* por f.
- Las asíntotas oblicuas se estudian en los infinitos en que la función no posee asíntota horizontal.
- La asíntota oblicua $y = mx + n$ para $x \to \infty$ se puede calcular como:

  $$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx$$

  Y de una forma análoga para $x \to -\infty$.

Límites útiles

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^k}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
- Sean

  $$p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$$
  $$q(x) = b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0$$

  dos polinomios. Entonces:

  $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \end{cases}$$

  En caso de que $n > m$, el límite será $-\infty$ o $+\infty$, en donde el signo debe analizarse en cada caso. Note que $p(x)$ toma el signo de a_nx^n y $q(x)$ el signo de b_mx^m cuando $x \to \pm\infty$.

Definición de Límite

Se vió que se tiene la siguiente caracterización del límite:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathrm{Dom}(f)),\ 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

Esta definición puede generalizarse adoptando la siguiente estructura:

$$\lim_{x\to A} f(x) = B \Leftrightarrow (\forall\ (1)\ )(\exists\ (2)\ )(\forall x \in \mathrm{Dom}(f)),\ (3) \Rightarrow (4)$$

En donde (1) y (4) serán las condiciones que controlen a $f(x)$ y (2) y (3) serán las condiciones que controlen a x, cuyas formas dependerán de A y B.

Condiciones sobre x

$$\begin{array}{rcl}
x \to x_0 & := & (2):\ \exists\delta > 0 \quad (3):\ 0 < |x - x_0| \leq \delta \\
x \to x_0^+ & := & (2):\ \exists\delta > 0 \quad (3):\ x_0 < x \leq x_0 + \delta \\
x \to x_0^- & := & (2):\ \exists\delta > 0 \quad (3):\ x_0 - \delta \leq x < x_0 \\
x \to +\infty & := & (2):\ \exists m > 0 \quad (3):\ x \geq m \\
x \to -\infty & := & (2):\ \exists m < 0 \quad (3):\ x \leq m
\end{array}$$

Condiciones sobre $f(x)$

$$\begin{array}{rcl}
\lim_{x\to A} f(x) = L & := & (1):\ \forall\varepsilon > 0 \quad (4):\ |f(x) - L| \leq \varepsilon \\
\lim_{x\to A} f(x) = L^+ & := & (1):\ \forall\varepsilon > 0 \quad (4):\ L \leq f(x) \leq L + \varepsilon \\
\lim_{x\to A} f(x) = L^- & := & (1):\ \forall\varepsilon > 0 \quad (4):\ L - \varepsilon \leq f(x) \leq L \\
\lim_{x\to A} f(x) = +\infty & := & (1):\ \forall M > 0 \quad (4):\ f(x) \geq M \\
\lim_{x\to A} f(x) = -\infty & := & (1):\ \forall M < 0 \quad (4):\ f(x) \leq M
\end{array}$$

Ejemplos

$$\begin{array}{rcl}
\lim_{x\to x_0+} f(x) = L & \Leftrightarrow & (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathrm{Dom}(f)),\ x_0 < x \leq x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon \\
\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty & \Leftrightarrow & (\forall M > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathrm{Dom}(f)),\ 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq M \\
\lim_{x\to -\infty} f(x) = L^+ & \Leftrightarrow & (\forall\varepsilon > 0)(\exists m < 0)(\forall x \in \mathrm{Dom}(f)),\ x \leq m \Rightarrow L \leq f(x) \leq L + \varepsilon
\end{array}$$