MA1001-1 Introducción al Cálculo, Semestre Primavera
Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliar: Nicolás Tapia Rivas

Auxiliar 14 y Repaso

12 de Noviembre de 2014

P1. Sea $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ una función derivable en todo $\mathbb{R}$. Se define la función $h(x) = \ln(f(x))$. Muestre, usando la definición límite de la derivada, que:

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

P2. Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $f(x)$ en $x = 1$, en los casos:

- $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x \operatorname{sen}(x)}{5x^3 - x + 4}$
- $f(x) = \dfrac{\cos(x) \ln(x)}{xe^x}$

P3. Considere $f : \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(x^2)} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Estudie los límites laterales de f en $x = 1$ y $x = -1$. ¿Existe el límite global?.

b) Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$.

c) Con el valor encontrado para a, calcule $f'(0)$.

P4. Sean f y g dos funciones continuas en todos los reales. Demuestre que:

$$(\forall r \in \mathbb{Q})\ f(r) = g(r) \iff (\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = g(x)$$

P5. Recordemos que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \exp(x) := \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

En un intento por generalizar este resultado, considere $x \in \mathbb{R}$ y una sucesión nula $h_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ de modo que $nh_n \to x$. Muestre que:

$$\lim\, (1 + h_n)^n = e^x$$

P6. Calcule los siguientes límites.

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{8}}$

c) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^r - 1}{x - 1}$ con $r \in \mathbb{R}^+$.

P7. Encuentre asíntotas de todo tipo para las siguientes funciones.

a) $f(x) = 1 + xe^x$

b) $h(x) = \dfrac{6x^3 + 5x^2 + 1}{3x^2 + x}$

c) $g(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - x}$