

P11

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

$$\Leftrightarrow \forall M < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (0, \infty), 0 < x \leq \delta \Rightarrow \ln(x) \leq M.$$

Borrador

Note que $\ln(x) \leq M \Leftrightarrow x \leq e^M$, luego es natural tomar $\delta = e^M$.

Demostración

Sea $M < 0$ y tomemos $\delta = e^M > 0$, luego $0 < x \leq \delta = e^M$ implica, por un lado, que $x > 0$ y se puede tomar su logaritmo, y por otro que $x \leq e^M \Rightarrow \ln(x) \leq M$. Es decir, $\exists \delta > 0$ tal que $0 < x \leq \delta \Rightarrow \ln(x) \leq M, \forall M < 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, 0 < x \leq \delta \Rightarrow \frac{1}{x} \geq M.$$

Borrador

Note que $\frac{1}{x} \geq M \xrightarrow{x > 0} x \leq \frac{1}{M}$, luego es natural tomar $\delta = \frac{1}{M}$.

Demostración

Sea $M > 0$ y tomemos $\delta = \frac{1}{M} > 0$, luego $0 < x \leq \delta = \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{x} \geq M$. Como $M > 0$ es arbitrario, se tiene lo pedido.

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$$\Leftrightarrow \forall M < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, 0 < -x \leq \delta \Rightarrow \frac{1}{x} \leq M.$$

Borrador

Note que $\frac{1}{x} \leq M \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \geq -M \xrightarrow{-x > 0} -x \leq \frac{-1}{M}$, luego es natural $\delta = \frac{-1}{M}$.

Dem. Sea $M < 0$ y tomemos $\delta = \frac{-1}{M} > 0$. luego $0 < -x \leq \delta = \frac{-1}{M} \Rightarrow x \geq \frac{1}{M}$.

Como ambos son negativos, $\Rightarrow \frac{1}{x} \leq M, \forall M < 0$ ya que fue arbitrario.

P2]

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}^-$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq m \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

Borrador:

Note que $\arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$ es trivial ya que $\arctan(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Para la otra podríamos "despejar" con tangente y tener $\tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) \leq x$.

Note, eso sí, que solo es posible ... devolverse si $(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) \in \text{Rango arctan}$.

Puesto que solo interesan ε pequeños, esto no es problema.

Demostración

Sea $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, con lo que $(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) > 0$. Tomemos $m = \tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)$, de modo que

$$x \geq m = \tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) \Rightarrow \arctan(x) \geq \arctan(\tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon))$$

$$\text{como } (\frac{\pi}{2} - \varepsilon) \in \text{Rango arctan} \Rightarrow \arctan(x) \geq \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Además como $\arctan(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$ siempre.

Luego, para $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\exists m > 0$ tal que $\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$ para todo $x \geq m$.

Para $\varepsilon \geq \frac{\pi}{2}$, basta tomar el "m" de $\varepsilon_0 = \frac{\pi}{4}$ de modo que

$$\forall x \geq m, \quad \frac{\pi}{2} - \varepsilon_0 \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}. \text{ Pero ya que}$$

$$\varepsilon > \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < -\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2} - \varepsilon_0.$$

$$\text{Tenemos } \forall x \geq m, \quad \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2} - \varepsilon_0 \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \forall x \geq m \quad \frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Es decir, $\forall \varepsilon > 0, \exists m > 0$ tal que se satisface la proposición.

Para la última parte, basta notar que:

$$\begin{aligned}\arctan(-x) = y &\Leftrightarrow -x = \tan(y) \\ &\Leftrightarrow x = -\tan(y) \\ &\Leftrightarrow x = \tan(-y) \quad / \text{por imparidad de tangente.} \\ &\Leftrightarrow \arctan(x) = -y. \Leftrightarrow -\arctan(x) = y\end{aligned}$$

↳ Este paso es más delicado, solo es cierto si $(-y) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, pero ya que $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, esto se satisface de manera trivial.

Pero $y = \arctan(-x)$. Es decir, $\arctan(-x) = -\arctan(x) \Rightarrow$ impar.

Luego basta cambiar de variable:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) ; \quad \begin{aligned} u = -x &\Rightarrow x = -u \\ x \rightarrow \infty &\Rightarrow u \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

$$= \lim_{u \rightarrow -\infty} \arctan(-u) = - \lim_{u \rightarrow -\infty} \arctan(u).$$

$$\Rightarrow \lim_{u \rightarrow -\infty} \arctan(u) = - \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

¿Cómo ver que es $-\frac{\pi}{2}^+$?

La parte que interesa en la def de límite es la última. Noten

que $\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$ era para $x \rightarrow \infty$. Si ponemos $u = -x$; $u \rightarrow -\infty$

tenemos $\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq -\arctan(u) \leq \frac{\pi}{2} \quad / \cdot -1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \geq \arctan(x) \geq -\frac{\pi}{2}.$

Es decir, es $-\frac{\pi}{2}^+$. En general, si $f(x) \rightarrow l^\pm$, tendremos:

$$(-f(x)) \rightarrow -l^\mp$$

p3]

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}}{x^2 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - (x^4 - x^2 + 1)}{x^2 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}}
 \end{aligned}$$

pero $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0$; $\forall k \in \{1, 2, 3, \dots\}$

$$\begin{aligned}
 \text{alg.} \quad & \frac{1 - 0}{1 + \sqrt{1 - 0 + 0}} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} + 3x + 1) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 3x + 1}{x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 3 + \frac{1}{x}}{1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}; \quad u = \frac{1}{x}; x \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} (\sqrt{1 + u} + 3 + u) \cdot \frac{\sin(u)}{u} \stackrel{\text{alg}}{=} \lim_{\text{conoc}} (\sqrt{1 + 0} + 3 + 0) \cdot 1 = 4.$$

P4]

$$a) f(x) = \frac{2x-5}{\sqrt{3x^2+4}}$$

A.H.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-5}{\sqrt{3x^2+4}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{5}{x}}{\sqrt{3 + \frac{4}{x^2}}} \stackrel{ab}{=} \frac{2-0}{\sqrt{3+0}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Como no importaba si $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$ es A.H.
por ambos lados $\Rightarrow$ no hay oblicuas.

A.V.

Candidatos: Ninguno ya que el denominador es siempre positivo.

$$b) g(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{(x-1)^2}{(x-2)}$$

A.H.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} \frac{(x-1)^2}{(x-2)} = \infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} \frac{(x-1)^2}{(x-2)} = -\infty.$$

$\downarrow$ $e^0 = 1$ $\downarrow$ $-\infty$

$\Rightarrow \nexists$ A.H.

A.V.

Candidatos: $x=0$ y $x=2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \frac{(x-1)^2}{(x-2)} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} \frac{(x-1)^2}{(x-2)} = 0.$$

$\downarrow$ $e^{+\infty} = \infty$ $\downarrow$ $e^{-\infty} = 0$

$\downarrow$ $\frac{1}{-2}$ $\downarrow$ $-\frac{1}{2}$

Nota:

Vimos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

y como exp es creciente

y no acob, $\lim_{u \rightarrow \infty} e^u = \infty$.

Nota:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\text{y } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

$\therefore x=0$ es A.V. (y $g(x)$ se dispara solo por la derecha).

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{1}{x}} \frac{(x-1)^2}{(x-2)} = \infty$$

$$\downarrow$$

$$e^{\frac{1}{2}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{u} = +\infty$$

$$\swarrow$$

$$u = x-2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{1}{x}} \frac{(x-1)^2}{x-2} = -\infty$$

$$\downarrow$$

$$e^{\frac{1}{2}} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{1}{u} = -\infty$$

$$\swarrow$$

$$u = x-2$$

Luego $x=2$ es A.V (y $g(x)$ se dispersa por ambos lados).

A.O. Puesto que no hay A.H., pueden haber oblicuas.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} \frac{(x-1)^2}{x(x-2)} = 1 \Rightarrow m=1$$

$$\downarrow$$

$$e^0 = 1 \quad \frac{x^2 + \dots}{x^2 + \dots} \rightarrow 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} \frac{(x-1)^2}{x-2} - x$$

$$\begin{aligned} * e^{\frac{1}{x}} \frac{(x-1)^2}{x-2} - x &= \frac{e^{\frac{1}{x}} (x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 2x)}{x-2} = \frac{(e^{\frac{1}{x}} - 1)(x^2 - 2x) + e^{\frac{1}{x}}}{x-2} \\ &= \frac{(e^{\frac{1}{x}} - 1)x(x-2)}{x-2} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-2} = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-2} \end{aligned}$$

Pero $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-2} = e^0 \cdot 0 = 0$.

$$\swarrow$$

$$u = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} \frac{(x-1)^2}{x-2} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-2} \right] = 1 + 0 = 1$$

$\Rightarrow y = x+1$ es A.O. tanto para la derecha como para la izquierda. =)