MA1001-2 Introducción al Cálculo. Semestre 2014-2
Profesores: Natacha Astromujoff, Michal Kowalczyk
Profesores Auxiliares: Nicolás Tapia R., Nicolás Zalduendo V.

Tarea #3

Fecha de Entrega: 21 de Noviembre de 2014

Problemas

1. *a*) Encuentre el valor de los siguientes límites:

   (i) $\lim\limits_{x\to 1} x^{-\frac{x}{\ln(x)}}$

   (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(\pi x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$

   (iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)^{\sqrt{x}}$

   (iv) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

   (v) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1},\ n\in\mathbb{Z}_+$

   (vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$

   (vii) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a},\ a>0,\ m\in\mathbb{Z}$

   (viii) $\lim\limits_{x\to \infty^+} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

   b) Encuentre el valor de k, sabiendo que:

   (i) $\lim\limits_{x\to \infty^+} \left(\dfrac{x+k}{x-k}\right)^{x} = 4$

   (ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+(k-2)x-2k}{x-2} = 5$

2. Estudie las asintotas de todo tipo de las siguientes funciones:

   (i) $f(x) = x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$

   (ii) $g(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

   (iii) $h(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$

   (iv) $w(x) = \dfrac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2-x-2}$

   (v) $u(x) = \dfrac{x+3}{x^2+2x-1}$

   (vi) $z(x) = \dfrac{x^2e^{\frac{2}{x}}}{x-1}$

   Para eso analice que ocurre en cada caso cuando $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to x_0^-$ y $x\to x_0^+$ (para un x_0 conveniente en cada caso.)

3. *a*) Demuestre por definición que:

   (i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

   (ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^- \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

   b) Sea $h:(0,\infty^+)\longrightarrow\mathbb{R}$ una función que cumple con las siguientes propiedades:

   (1) $h(xy) = h(x)+h(y)\ \forall x,y>0$

   (2) $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = h(1)$

El objetivo de este problema es probar que

$$\lim_{x \to a} h(x) = h(a), \ \forall a > 0$$

Para eso proceda como sigue:

(i) Calcule $h(1)$.

(ii) Encuentre una relación entre $h(x)$ y $h(x^{-1})$.

(iii) Usando que $\lim_{u \to u_0} f(u) = L \Leftrightarrow \lim_{u \to u_0} f(u) - L = 0$, concluya el resultado.

4. Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice *continua* si $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \ \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

   Definamos ahora el límite:

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

   Demuestre que si L existe para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces f es una función continua.

5. *a*) Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice *derivable en cero* si existe el límite

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

   En caso de existir decimos de $f'(0)$ es la *derivada de f en $x = 0$*. Determine si las siguientes funciones son derivables en cero y, en caso de serlo, determine su valor:

   (i) $f(x) = e^{x^2}$

   (ii) $f(x) = \cos(x)$

   (iii) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

   (iv) $f(x) = mx + n, \ m, n \neq 0$

   (v) $f(x) = a^x, \ a \neq 0$

   (vi) $f(x) = \ln(\cos(x) + \operatorname{sen}(x))$

   b) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   (i) Calcule el valor de α tal que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

   (ii) Calcule el valor de $f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.