

P6]

a) pdg: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \frac{\sin^n(n)}{n} - 0 \right| \leq \varepsilon$.

Dem: Sea $\varepsilon > 0$, veamos que, ya que $|\sin(n)| \leq 1$.

$$\left| \frac{\sin^n(n)}{n} \right| \leq \frac{|\sin(n)|^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Tomando $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, tenemos $\forall n \geq n_0, n \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon$.

Luego $\left| \frac{\sin^n(n)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario, esto es válido $\forall \varepsilon > 0$.

Nota = También se puede usar la Prop. Arquimediiana para decir que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n_0 \varepsilon > 1 \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{n_0}$.

b) Si a_n converge, entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n - L| \leq \varepsilon$ para algún L .

(i) Sea $\varepsilon > 0$. Tomando $n'_0 = \max\{0, n_0 - k\}$ del n_0 de la convergencia de a_n , tenemos que $\forall n \geq n'_0, n+k \geq n_0$ y por la convergencia de a_n , se tendrá $|a_{n+k} - L| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |b_n - L| \leq \varepsilon$. Luego, hemos probado que para $\varepsilon > 0, \exists n'_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\forall n \geq n'_0, |b_n - L| \leq \varepsilon$, ie, b_n converge.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos el n_0 de la convergencia de a_n .

$f(\mathbb{N})$ es un conjunto no acotado (ie, f no es acotada). En efecto, si $f(\mathbb{N})$ fuese acotada, entonces existe su supremo. Ya que $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, los elementos de $f(\mathbb{N})$ se pueden ordenar y se puede seleccionar el más grande, digamos $f(n_{\max})$. Pero $f(n_{\max}) < f(n_{\max} + 1)$ por el crecimiento estricto, lo que es una contradicción.

Como f no es acotada, existen $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(k_0) \geq n_0$. Luego por el crecimiento estricto, $\forall k \geq k_0, f(k) > f(k_0) \geq n_0$.

$\Rightarrow |a_{f(k)} - L| \leq \varepsilon \Rightarrow |c_k - L| \leq \varepsilon$, ie, c_n converge.

c) $L \neq 0$. Acá hay variedad. Un ejemplo sencillo es $a_n = 1$ (convergente a 1) y $b_n = (-1)^n$ (acotada ya que $|b_n| \leq 1; \forall n \in \mathbb{N}$). Y $c_n = a_n b_n = (-1)^n$ es considerablemente divergente por propiedad vista en el curso.

d)

(i)

$$a_n = \sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-2} = \frac{(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-2})(\sqrt[3]{(n+2)^2} + \sqrt[3]{(n+2)(n-2)} + \sqrt[3]{(n-2)^2})}{(\sqrt[3]{(n+2)^2} + \sqrt[3]{(n+2)(n-2)} + \sqrt[3]{(n-2)^2})}$$

$$= \frac{(n+2) - (n-2)}{\sim} = \frac{4}{\sim}$$

Por $\sim = \sqrt[3]{n^2} \left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2} \right) = \sqrt[3]{n^2} \cdot S_n$

Puesto que $\frac{2}{n} \rightarrow 0$, por álgebra de límites se concluye que

$$S_n \rightarrow \sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1^2} = 3.$$

Además $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{n^2}} \rightarrow 0$, por lo que

$$a_n = \sqrt[3]{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{4}{S_n} \rightarrow 0 \text{ por álgebra de límites}$$

(ii)

$$a_n = n \cos(n) [\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}] = \frac{n \cos(n) [(n^4+1) - (n^4-1)]}{\sqrt{n^4+1} + \sqrt{n^4-1}}$$

$$= \frac{2n \cos(n)}{n^2 \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^4}} \right)} = 2 \cdot \frac{\cos(n)}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^4}}} \rightarrow 0 \text{ [por álgebra]}$$

$\downarrow$ constants $\downarrow$ nula • acotada = nula $\downarrow$ converge a $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ por álgebra

e)

7

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{\sqrt[3]{n^{k+1}} - \sqrt[3]{n^k - 1}}{\sqrt{n^{m+1}} - \sqrt{n^m - 1}} = \frac{(\sqrt[3]{n^{k+1}} - \sqrt[3]{n^k - 1})(\sqrt[3]{(n^{k+1})^2} + \sqrt[3]{(n^{k+1})(n^k - 1)} + \sqrt[3]{(n^k - 1)^2})}{(\sqrt{n^{m+1}} - \sqrt{n^m - 1})(\sqrt[3]{(n^{k+1})^2} + \sqrt[3]{(n^{k+1})(n^k - 1)} + \sqrt[3]{(n^k - 1)^2})} \\
 &= \frac{[(n^{k+1}) - (n^k - 1)](\sqrt{n^{m+1}} + \sqrt{n^m - 1})}{(\sqrt{n^{m+1}} - \sqrt{n^m - 1})(\sqrt{n^{m+1}} + \sqrt{n^m - 1})(\sqrt[3]{(n^{k+1})^2} + \sqrt[3]{(n^{k+1})(n^k - 1)} + \sqrt[3]{(n^k - 1)^2})} \\
 &= \frac{[n^{k+1} - n^k + 1]}{[n^{m+1} - n^m + 1]} \cdot \frac{\sqrt{n^m}(\sqrt{1 + \frac{1}{n^m}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^m}})}{\sqrt[3]{n^{2k}}(\sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n^k})^2} + \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n^k})(1 - \frac{1}{n^k})} + \sqrt[3]{(1 - \frac{1}{n^k})^2})}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{2} \cdot \frac{n^{\frac{m}{2}}}{n^{\frac{2k}{3}}} \cdot S_n = S_n \cdot n^{\frac{3m-4k}{6}} ; \text{ donde se definió}$$

$$S_n = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^m}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^m}}}{\sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n^k})^2} + \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n^k})(1 - \frac{1}{n^k})} + \sqrt[3]{(1 - \frac{1}{n^k})^2}} \quad \text{cuyo límite es } \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3} \text{ por álgebra de límites.}$$

a_n depende del signo de $(3m-4k)$

$$1.- \text{ Si } 3m < 4k, \text{ entonces } 3m-4k < 0 \Rightarrow \sqrt[6]{\frac{1}{n^{4k-3m}}} \rightarrow 0 \Rightarrow 4k-3m > 0$$

$$\text{Pues por álgebra, } a_n = \sqrt[6]{n^{3m-4k}} \cdot S_n \rightarrow 0 //$$

$$2.- \text{ Si } 3m = 4k, \text{ entonces } 3m-4k = 0 \text{ y } a_n = n^0 \cdot S_n = S_n \rightarrow \frac{2}{3} //$$

$$3.- \text{ Si } 3m > 4k, \text{ entonces } 3m-4k > 0, \text{ puesto que}$$

$$\frac{1}{a_n} = \sqrt[6]{\frac{1}{n^{3m-4k}}} \cdot \frac{1}{S_n} \rightarrow 0 \text{ por álgebra,}$$

se tiene que a_n es divergente por prop. del inverso.

a) No se puede usar Sandwich ya que a_n y c_n no convergen a lo mismo necesariamente.

Como a_n y c_n convergen, entonces son acotados y existen reales positivos m y M tal que $m \leq a_n$ y $c_n \leq M$. Luego, $\forall n > N_0$

$$m \leq b_n \leq M$$

Tomando $M' = \max \{ |M|, |m| \}$, tenemos $|b_n| \leq M'$, $\forall n > N_0$

Tomando $M'' = \max \{ b_0, b_1, \dots, b_{N_0} \}$, tenemos $|b_n| \leq M''$, $\forall n \leq N_0$

Luego para $M_b = \max \{ M', M'' \}$, se tiene $|b_n| \leq M_b$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ie, b_n es acotada.

b)(i) Puesto que a_n es acotada, todos los conjuntos $\{ a_k : k \geq n \}$ serán acotados $\forall n \in \mathbb{N}$, por lo que su supremo está bien definido.

Puesto que $\sup \{ a_k : k \geq n \}$ también acota superiormente

a $\{ a_k : k \geq n+1 \}$, se tendrá necesariamente que

$$\sup \{ a_k : k \geq n \} \geq \sup \{ a_k : k \geq n+1 \}$$

$$\Leftrightarrow b_n \geq b_{n+1}$$

Es decir, b_n es decreciente.

(ii) Como a_n es acotada, $\exists m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En particular, cada conjunto $\{ a_k : k \geq n \}$ es acotado inferiormente por m , por lo que se tendrá $m \leq \sup \{ a_k : k \geq n \}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ie, $m \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n$ es acotada inferiormente. Por el teorema de las sucesiones monótonas, b_n es convergente.

(iii) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Notemos que n par $\Rightarrow a_n = 1 + \frac{1}{n} > 0$
 n impar $\Rightarrow a_n = -1 + \frac{1}{n} < 0$.

Además, como el sumando $\frac{1}{n}$ decrece, el máximo valor de $\{ a_k : k \geq n \}$ será el valor de a_m con m el menor par disponible. Es decir,

$$b_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 + \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Es fácil ver que para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq b_n \leq 1 + \frac{1}{n}$ (ya que $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$), luego por Sandwich $b_n \rightarrow 1$.

c)

(i) Supongamos $a > b$, luego

$$\sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2a^n}$$

$$\Leftrightarrow a \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq a\sqrt[n]{2}$$

Como $a \rightarrow a$ y $a\sqrt[n]{2} \rightarrow a$ (ya que $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$), por Sandwich

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} \rightarrow a$$

Si $b > a$, el razonamiento es análogo y $\sqrt[n]{a^n + b^n} \rightarrow b$.Por lo tanto, $\sqrt[n]{a^n + b^n} \rightarrow \max\{a, b\}$.

(ii)

Como $\frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1}$; $\forall k$, se tiene

$$0 \leq \left(\frac{1}{n^2+1} + \dots + \frac{1}{n^2+n} \right) \leq n \cdot \frac{1}{n^2+1}$$

Como $\frac{n}{n^2+1} \rightarrow 0$, por Sandwich la sucesión converge a cero.

(iii)

$$\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^{n+k}}{\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^k} = \frac{s_{n+k}}{\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^k}$$

Donde $s_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$. Como s_{n+k} converge a lo mismo y $\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^k \rightarrow (1+0)^k = 1$ por álgebra de límites (nota que k es fijo),se tiene $\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n = \frac{s_n}{\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^k} \rightarrow \frac{e}{1} = e$ por álgebra de límites.(iv) $\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)^n = \left(1 + \frac{2}{n^2+3n}\right)^n = (1+h_n)^n$ con $h_n = \frac{2}{n^2+3n}$. Como $h_n \rightarrow 0$ y $nh_n = \frac{2n}{n^2+3n} \rightarrow 0$, por prop se concluye $(1+h_n)^n \rightarrow 1$. Es decir,

$$\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)^n \rightarrow 1$$