Auxiliar 12
Solución

P1

a) $\lim\limits_{x\to 8} \sqrt{x+1} = 3 \iff \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x\in[-1,\infty), \; 0<|x-8|\leq\delta \Rightarrow |\sqrt{x+1}-3|\leq\varepsilon.$

Sea $\varepsilon>0$ arbitrario. Veamos que

$$|\sqrt{x+1}-3| = \left|(\sqrt{x+1}-3)\cdot\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}+3}\right| = \left|\frac{x+1-9}{\sqrt{x+1}+3}\right| = \frac{|x-8|}{\sqrt{x+1}+3} \leq \frac{|x-8|}{3}.$$

Si elegimos $\delta = 3\varepsilon$, tendremos $|x-8| \leq \delta \Rightarrow$

$$|\sqrt{x+1}-3| = \frac{|x-8|}{\sqrt{x+1}+3} \leq \frac{|x-8|}{3} \leq \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon \;//$$

Como $\varepsilon>0$ fue arbitrario, se tiene $\forall\varepsilon>0$.

b) Si $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$, entonces

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in Dom(g), \; 0<|x|\leq\delta \Rightarrow |g(x)|\leq\varepsilon.$$

Pero como $|sen(\frac{1}{x})| \leq 1 \Rightarrow |g(x)\,sen(\frac{1}{x})| = |g(x)||sen(\frac{1}{x})| \leq |g(x)|$, también tendremos

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in Dom(g)\setminus\{0\}, \; 0<|x|\leq\delta \Rightarrow |g(x)\,sen(\tfrac{1}{x})| \leq |g(x)| \leq \varepsilon$$

Es decir,

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in Dom(g)\setminus\{0\}, \; 0<|x|\leq\delta \Rightarrow |g(x)\,sen(\tfrac{1}{x})| \leq \varepsilon$$

Que no es otra cosa que

$$\lim_{x\to 0} g(x)\,sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \;//$$

P2] Sea $\varepsilon>0$. Si f es Lipschitz, entonces

$$\exists L>0,\ \forall x,y\in\mathbb{R},\quad |f(x)-f(y)|\leq L|x-y|$$

Fijemos $y=x_0$. Si exigimos $0<|x-x_0|\leq\frac{\varepsilon}{L}$, entonces por lo anterior

$$|f(x)-f(x_0)|\leq L|x-x_0|\leq L\cdot\frac{\varepsilon}{L}=\varepsilon.$$

Es decir, $\forall x\in\mathbb{R},\ 0<|x-x_0|\leq\frac{\varepsilon}{L}\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|\leq\varepsilon$.

Si nombramos $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$, y puesto que $\varepsilon>0$ es arbitrario, tenemos

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ 0<|x-x_0|\leq\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|\leq\varepsilon$$

Que no es otra cosa que $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Nota: Puesto que f es Lipschitz, existe un $L>0$ que cumple tal gracia. Puesto que existe, lo puedo ocupar, sin importar cuánto vale. Note que usamos $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$, cuyo valor no sabemos (aunque sepamos ε) pero que sabemos que existe, ya que L existe. Como la definición de límite solo pide existencia de $\delta>0$, esto es suficiente para nosotros.

P3] $f: (-1,\infty)\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi(x^2-x)}{\operatorname{sen}(\pi x)} & \text{si } -1<x<1,\ x\neq 0\\[2ex] \dfrac{a x e^x}{1-e^x} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ Puesto que $x\to 0$, nos interesarán valores de x cercanos a cero, en donde $f(x)=\dfrac{\pi(x^2-x)}{\operatorname{sen}(\pi x)}$

Luego queremos calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi(x^2-x)}{\operatorname{sen}(\pi x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi x(x-1)}{\operatorname{sen}(\pi x)}$$

Pero $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi x}{\operatorname{sen}(\pi x)}$; $u=\pi x$, $u\to 0$ cuando $x\to 0$ $=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\operatorname{sen} u}=1.$ (Límite conocido)

Además $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=0-1=-1.$

Luego por álgebra $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi(x^2-x)}{\operatorname{sen}(\pi x)}=1\cdot(-1)=-1.$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ Notemos que $f(x)$ en las cercanías de $x=1$ cambia de fórmula según estemos a la derecha $(x>1)$ o a la izquierda $(x<1)$ de $x=1$. Se hace natural el uso de límites laterales.

Por la derecha $x>1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{a x e^x}{1-e^x}=\frac{a\cdot 1\cdot e^1}{1-e^1}=\frac{ae}{1-e}.$$

Por la izquierda | $x < 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\pi(x^2 - x)}{sen(\pi x)} \quad ; \text{ pero } sen(\pi \cdot 1) = 0.$$

Para usar el límite conocido necesitamos tender a cero. Introduzcamos el cambio $u = x - 1$; $u \to 0^-$ cuando $x \to 1^-$ con esto $x = u + 1$.

Es decir, $\pi x = \pi u + \pi$ y $(x^2 - x) = x(x-1) = (u+1)u$

Luego

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{u \to 0^-} \frac{\pi(u+1)u}{sen(\pi u + \pi)}$$

Pero $sen(\pi u + \pi) = sen(\pi u)\cos(\pi) + \cos(\pi u) sen(\pi) = -sen(\pi u)$. Entonces:

$$= \lim_{u \to 0^-} \frac{\pi u (1+u)}{-sen(\pi u)}$$

Pero $\lim_{u \to 0^-} \frac{\pi u}{sen(\pi u)}$; $\begin{array}{l} w = \pi u \\ w \to 0^- \text{ si } u \to 0^- \end{array}$ $= \lim_{w \to 0^-} \frac{w}{sen\, w} = 1$ (lím conocido)

Y $\lim_{u \to 0^-} (1+u) = 1$.

Luego por álgebra, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$.

Para que el límite en $x=1$ exista, necesitamos límites laterales iguales. Es decir

$$-1 = \frac{ae}{1-e}$$

$$\Leftrightarrow e - 1 = ae$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{e-1}{e} \quad //$$

P4)

a) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{|x|-2}$; como $x \to -2$, estaremos cerca de -2, ie, $|x| = -x$.

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{-x-2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{-(x+2)} \underset{\substack{\downarrow \\ x \neq -2 \\ \text{en el límite.}}}{=} \lim_{x \to -2} -(x^2-2x+4) = -(4+4+4) = -12$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim_{x \to 0} e^{bx} \cdot \frac{e^{ax-bx}-1}{x} = \lim_{x \to 0} e^{bx} \frac{e^{(a-b)x}-1}{x}$$

Pero $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{(a-b)x}-1}{x} = (a-b) \lim_{x \to 0} \frac{e^{(a-b)x}-1}{(a-b)x} \underset{\substack{\downarrow \\ u=(a-b)x \\ u \to 0}}{=} (a-b) \lim_{u \to 0} \frac{e^u-1}{u} = a-b$$

Y $$\lim_{x \to 0} e^{bx} = e^0 = 1.$$

Luego por álgebra $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = 1 \cdot (a-b) = a-b.$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(\pi |x|)}{x}$; como en las cercanías de cero $|x| = x$ o $|x| = -x$, haremos uso de los límites laterales.

- $$\lim_{x \to 0^-} \frac{\text{sen}(\pi|x|)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\text{sen}(-\pi x)}{x} = -\lim_{x \to 0^-} \pi \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} \underset{\substack{\downarrow \\ u=\pi x \\ u \to 0^-}}{=} -\lim_{u \to 0^-} \pi \frac{\text{sen}\, u}{u} = -\pi$$

- $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}(\pi|x|)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}(\pi x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \pi \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} \underset{\substack{\downarrow \\ u=\pi x \\ u \to 0^+}}{=} \lim_{u \to 0^+} \pi \frac{\text{sen}\, u}{u} = \pi$$

Como son distintos los límites laterales, no existe.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2x)}{x \operatorname{sen}(3x)} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \cdot \dfrac{3x}{\operatorname{sen}(3x)} \cdot \dfrac{2}{3} \right)$

Pero $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\operatorname{sen}(3x)} \underset{\substack{u=3x \\ u\to 0}}{=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u}{\operatorname{sen} u} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \underset{\substack{u=2x \\ u\to 0}}{=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$

Luego por álgebra

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2x)}{x \operatorname{sen}(3x)} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\exp(x\ln(x)) - 1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\exp(x\ln(x)) - 1}{x\ln(x)}\right)\left(\dfrac{\ln(x)}{x-1}\right)\cdot x$

Pero $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\exp(x\ln(x)) - 1}{x\ln(x)} \underset{\substack{u=x\ln(x) \\ u\to 0}}{=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$ Y $\lim\limits_{x\to 1} x = 1.$

Luego por álgebra $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\exp(x\ln(x)) - 1}{x-1} = 1\cdot 1\cdot 1 = 1.$

f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))}{x}$; $\operatorname{sen}(x)+\cos(x) \to 1$ cuando $x\to 0$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)-1}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)-1}{x}\right)$$

pero $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)-1} = \lim_{u\to 1} \dfrac{\ln(u)}{u-1} = 1$

$u = \operatorname{sen}(x)+\cos(x)$

$u \to 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - \frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot x = 1-\frac{1}{2}\cdot 0 = 1.$$

Luego por álgebra, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))}{x} = 1\cdot 1 = 1.$

g) $\lim_{x\to 2} (e^x - e^2)\cot(x-2) = \lim_{x\to 2} (e^x-e^2)\dfrac{\cos(x-2)}{\operatorname{sen}(x-2)}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{e^x-e^2}{x-2}\cdot\frac{x-2}{\operatorname{sen}(x-2)}\cos(x-2)$$

$$= \lim_{x\to 2} e^2\cdot\frac{e^{x-2}-1}{x-2}\cdot\frac{x-2}{\operatorname{sen}(x-2)}\cdot\cos(x-2) \quad ; \quad \begin{matrix} u = x-2 \\ u\to 0\end{matrix}$$

$$= e^2 \lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u}\cdot\frac{u}{\operatorname{sen}(u)}\cdot\cos(u) = e^2\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = e^2 \,//$$

Scanned by CamScanner

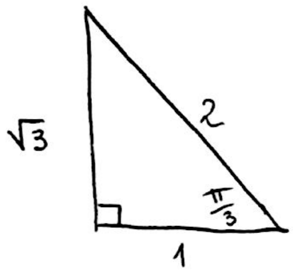
h) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos(x)}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$$

Para usar los límites conocidos trigonométricos, necesitamos tender a cero.

Hagamos $u = x - \frac{\pi}{3}$, $u \to 0$ cuando $x \to \frac{\pi}{3}$.

Luego el límite es $$\lim_{u \to 0} \frac{1 - 2\cos\left(u + \frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{sen}(u)}$$

Pero $\cos\left(u + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(u)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.



$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos\left(u + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos(u)}{2} - \frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}(u)}{2}.$$

$$\Rightarrow 2\cos\left(u + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(u) - \sqrt{3}\operatorname{sen}(u)$$

$$\Rightarrow 1 - 2\cos\left(u + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \cos(u) + \sqrt{3}\operatorname{sen}(u)$$

Reemplazando tenemos

$$\lim_{u \to 0} \frac{1 - \cos(u) + \sqrt{3}\operatorname{sen}(u)}{\operatorname{sen}(u)} = \lim_{u \to 0} \frac{1 - \cos(u)}{\operatorname{sen}(u)} + \sqrt{3} = \lim_{u \to 0} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} \cdot \frac{u}{\operatorname{sen}(u)} \cdot u + \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Es decir,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos(x)}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}.$$