

Auxiliar 11
Solución

* d s fund:
desigualdad fundamental

P1] Siguiendo la indicación, veamos que $\lim \frac{n^k}{e^n} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$. La prop es trivial para $k=0$ ya que $|\frac{1}{e}| < 1 \Rightarrow \frac{1}{e^n} \rightarrow 0$. Centrémonos en $k > 0$.

Notemos que:
[des. fund]
$$e^n = \left(e^{\frac{n}{2k}}\right)^{2k} \geq \left(\frac{n}{2k} + 1\right)^{2k} \geq \left(\frac{n}{2k}\right)^{2k} = \frac{n^{2k}}{2k^{2k}} = \frac{n^{2k}}{A_k}$$

donde A_k es una constante que depende de k .

Luego $\forall k \in \mathbb{N}, k \neq 0$, tenemos

$$e^n \geq \frac{n^{2k}}{A_k} \xRightarrow{e^n > 0} \frac{1}{e^n} \leq \frac{A_k}{n^{2k}}$$

Luego para $\frac{n^k}{e^n}$ tenemos el acotamiento

$$\begin{array}{ccc} 0 \leq \frac{n^k}{e^n} \leq \frac{A_k n^k}{n^{2k}} = \frac{A_k}{n^k} & ; & \forall n \in \mathbb{N} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Por sandwich, $\frac{n^k}{e^n} \rightarrow 0$.

Puesto que todo polinomio de grado k se puede escribir como

$$p(n) = \sum_{i=0}^k a_i n^i$$

Tenemos que

$$\frac{p(n)}{e^n} = \sum_{i=0}^k a_i \frac{n^i}{e^n} \quad ; \text{ pero ya vimos que } \frac{n^i}{e^n} \rightarrow 0 \text{ para cada } i.$$

Por álgebra de límites,
$$\frac{p(n)}{e^n} \rightarrow \sum_{i=0}^k a_i \cdot 0 = 0.$$

P2]

$$1:- \frac{a_n \ln(a_n)}{a_n^2 - 1} = \frac{a_n \ln(a_n)}{(a_n+1)(a_n-1)} = \left(\frac{a_n}{a_n+1} \right) \left(\frac{\ln(a_n)}{a_n-1} \right)$$

Pero $\frac{a_n}{a_n+1} \rightarrow \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ y $\frac{\ln(a_n)}{a_n-1} = \frac{\ln(a_n) - \ln(1)}{a_n - 1} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$. Luego por álgebra

$$\frac{a_n \ln(a_n)}{a_n^2 - 1} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

2:- $e^{-n} \sqrt{n}$

Por des fund, $e^n \geq n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{e^n} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{e^n} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Luego

$$0 \leq e^{-n} \sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} ; \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad \qquad 0$$

Por sandwich, $e^{-n} \sqrt{n} \rightarrow 0$.

3:- $\frac{\ln(n)}{n}$

Por fund, $\ln(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} - 1 < \sqrt{n}$; pero $\ln(\sqrt{n}) = \frac{1}{2} \ln(n)$. Luego

$$0 \leq \ln(n) \leq 2\sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{\ln(n)}{n} \leq 2 \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad \qquad 0$$

Por sandwich, $\frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0$.

$$4:- n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} ; \text{ si } a_n = \frac{1}{n}, \text{ tenemos } a_n \rightarrow a = 0 \text{ y } (e^0 = 1)$$

$$n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = \frac{e^{a_n} - e^a}{a_n - a} \rightarrow e^a = e^0 = 1.$$

$$5:- \frac{e^{\frac{1}{n}} - e^{\sin(\frac{1}{n})}}{\frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n})} = e^{\sin(\frac{1}{n})} \cdot \frac{e^{\frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n})} - 1}{\frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n})} ; a_n = \frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n})$$

Pero $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \sin(\frac{1}{n}) \rightarrow \sin(0) = 0$. Luego $a_n \rightarrow a = 0$ y

$$\frac{e^{\frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n})} - 1}{\frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n})} = \frac{e^{a_n} - e^a}{a_n - a} \rightarrow e^a = e^0 = 1.$$

Además, $\sin(\frac{1}{n}) \rightarrow 0 \Rightarrow e^{\sin(\frac{1}{n})} \rightarrow e^0 = 1$. Luego por álgebra

$$\frac{e^{\frac{1}{n}} - e^{\sin(\frac{1}{n})}}{\frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n})} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1.$$

$$6:- \left(\frac{n^2+n-1}{n^2-1} \right)^{n+x} = \exp \left((n+x) \ln \left(\frac{n^2+n-1}{n^2-1} \right) \right)$$

Como $\frac{n^2+n-1}{n^2-1} \rightarrow 1$, escribámoslo como $1 + h_n$ para que sea más cómodo, luego se tiene

$$\left(\frac{n^2+n-1}{n^2-1} \right)^{n+x} = \exp \left((n+x) \ln \left(1 + \frac{n}{n^2-1} \right) \right)$$

Acudimos al límite del logaritmo (hay que armarlo) que dice $\frac{\ln(a_n) - \ln(a)}{a_n - a} \rightarrow \frac{1}{a}$.

Luego $(\ln(1) = 0)$

$$\left(\frac{n^2+n-1}{n^2-1} \right)^{n+x} = \exp \left(\underbrace{\left[\frac{\ln(1 + \frac{n}{n^2-1}) - \ln(1)}{(1 + \frac{n}{n^2-1}) - 1} \right]}_{\rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{1} = 1} \cdot \underbrace{\frac{n}{n^2-1} \cdot (n+x)}_{= \frac{n^2+nx}{n^2-1} \rightarrow 1} \right)$$

Por álgebra, el interior de la exponencial converge a $1 \cdot 1 = 1$. Pero $a_n \rightarrow a \Rightarrow e^{a_n} \rightarrow e^a$.

Por lo tanto $\left(\frac{n^2+n-1}{n^2-1}\right)^{n+1} \rightarrow e^1 = e$

$$7.- (1+x^{-n})^{\ln(n)} ; x > 0 ; (1+x^{-n})^{\ln(n)} = \exp(\ln(n) \ln(1+x^{-n}))$$

Caso $0 < x < 1$ | Aquí $\frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^n$ es no acotada superiormente. Por lo tanto $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $1 + \left(\frac{1}{x}\right)^n > e ; \forall n \geq n_0$. Como $\ln(\cdot)$ es creciente, esto implica $\ln\left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)^n\right) > \ln(e) = 1, \forall n \geq n_0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)^n\right) &> 1 \quad / \cdot \ln(n) \\ \ln(n) \ln\left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)^n\right) &> \ln(n) \quad / \text{Aplicamos } \exp(\cdot) \text{ creciente} \\ \exp\left(\ln(n) \ln\left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)^n\right)\right) &> \exp(\ln(n)) = n \end{aligned}$$

Es decir, $(1+x^{-n})^{\ln(n)} \geq n \quad \forall n \geq n_0$. Como " n " no es acotada, tampoco lo es $(1+x^{-n})^{\ln(n)}$ y por lo tanto diverge.

$$\text{Caso } x = 1 \mid \text{Aquí } (1+x^{-n})^{\ln(n)} = 2^{\ln(n)} = \exp(\ln(n) \ln(2)) \geq \ln(n) \ln(2) + 1$$

Pero $2 > 1 \Rightarrow \ln(2) > 0$ y $\ln(n)$ no es acot superiormente, por lo tanto $(1+x^{-n})^{\ln(n)}$ tampoco lo es y diverge.

$$\text{Caso } x > 1 \mid \text{Aquí } 0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^n \rightarrow 0$$

Arreglamos entonces

$$(1+x^{-n})^{\ln(n)} = \exp\left(\ln(n) \ln(1+x^{-n})\right) = \exp\left(\underbrace{x^{-n} \ln(n)}_{(*)} \cdot \underbrace{\left[\frac{\ln(1+x^{-n}) - \ln(1)}{(1+x^{-n}) - 1}\right]}_{\rightarrow \frac{1}{1} = 1}\right)$$

$$(*) \text{ pero por des fund, } \underbrace{0}_{\downarrow 0} \leq x^{-n} \ln(n) \leq \underbrace{x^{-n}(n-1)}_{\downarrow 0} < x^{-n} n$$

Por sandwich, $x^{-n} \ln(n) \rightarrow 0$. Como lo del interior converge a $0 \cdot 1 = 0$ por álgebra, $(1+x^{-n})^{\ln(n)} \rightarrow e^0 = 1$.

$$8.- \frac{1}{n} \ln \left(\sum_{i=0}^k e^{in} \right)$$

Forma 1:

$$e^{nk} \leq \sum_{i=0}^k e^{in} \leq (k+1) e^{nk} \quad / \cdot \ln(\quad) ; \text{creciente}$$

$$\Rightarrow \ln(e^{nk}) \leq \ln \sum_{i=0}^k e^{in} \leq \ln((k+1) e^{nk})$$

$$\Rightarrow nk \leq \ln \left(\sum_{i=0}^k e^{in} \right) \leq \ln(k+1) + nk \quad / \cdot \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow k \leq \frac{1}{n} \ln \left(\sum_{i=0}^k e^{in} \right) \leq \frac{\ln(k+1)}{n} + k$$

$$\downarrow$$

$$k$$

$$\downarrow$$

$$0+k=k$$

Por sandwich, $\frac{1}{n} \ln \left(\sum_{i=0}^k e^{in} \right) \rightarrow k$

Forma 2:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k e^{in} &= \sum_{i=0}^k (e^n)^i = \frac{e^{n(k+1)} - 1}{e^n - 1} = \frac{e^{nk} e^n - 1}{e^n - 1} \xrightarrow{\text{simplificar por } e^n} \frac{e^{nk} - e^{-n}}{1 - e^{-n}} \\ &= e^{nk} \cdot \frac{1 - e^{-n} e^{-nk}}{1 - e^{-n}} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln \left(\sum_{i=0}^k e^{in} \right) &= \frac{1}{n} \ln \left(e^{nk} \cdot \frac{1 - e^{-n} e^{-nk}}{1 - e^{-n}} \right) = \frac{1}{n} \left[\ln(e^{nk}) + \ln \left(\frac{1 - e^{-n} e^{-nk}}{1 - e^{-n}} \right) \right] \\ &= k + \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1 - e^{-n} e^{-nk}}{1 - e^{-n}} \right) \end{aligned}$$

Pero $e^{-n} = \frac{1}{e^n} \rightarrow 0$, por lo que por álgebra $\frac{1 - e^{-n} e^{-nk}}{1 - e^{-n}} \rightarrow \frac{1 - 0 \cdot 0}{1 - 0} = 1$. Como

$a_n \rightarrow a \Rightarrow \ln(a_n) \rightarrow \ln(a)$, tenemos que el logaritmo tiende a $\ln(1) = 0$. Además $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Por álgebra $k + \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1 - e^{-n} e^{-nk}}{1 - e^{-n}} \right) \rightarrow k + 0 \cdot 0 = k$ y se concluye lo mismo.

P3]

$$U_n = \frac{n^n}{n! e^n}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)! e^{n+1}}}{\frac{n^n}{n! e^n}} = \frac{(n+1)^{n+1} n! e^n}{n^n (n+1)! e^{n+1}} = \frac{(n+1)^n (n+1) n! e^n}{n^n n! (n+1) e^n \cdot e}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n e} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{e} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e}$$

Pero $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$, donde e es el supremo de $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$. Por

lo tanto $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1 \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n \Rightarrow$ decreciente.

Como $U_n \geq 0$ (acotada inferiormente), se tiene por TSM que U_n converge.