MA1001-1 Introducción al Cálculo, Semestre Primavera
Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliar: Nicolás Tapia Rivas

Resumen Semana 11

La función exponencial

- La sucesión definida por:
$$s_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$
Es creciente y acotada superiormente para cualquier valor real de x. En virtud del Teorema de Sucesiones Monótonas, s_n converge a su supremo.
- Debido a lo anterior podemos definir una función:
$$\exp(x) = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$
Denominada la *función exponencial.*
- La función exponencial está por lo tanto definida para todo $\mathbb{R}$.
- Recordar que $\exp(1) = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.
- Se tiene $\forall x, y \in \mathbb{R}$ que:
$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \qquad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$
- La función exponencial es siempre *estrictamente* positiva. En particular, nunca se anula.
- El recíproco de la función exponencial de x es la función exponencial del recíproco de x:
$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = (\exp(x))^{-1}$$
- La función exponencial cumple con que para $r = p/q \in \mathbb{Q}$:
$$\exp\left(\frac{px}{q}\right) = \sqrt[q]{\exp(x)^p}$$
En su sentido usual. En particular con $x = 1$ obtenemos la siguiente igualdad:
$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{e^p} = e^{p/q}$$
Con esta identificación, vemos que para $a, b \in \mathbb{Q}$ se tiene que $\exp(a) = e^a$, $\exp(b)e^b$ y:
$$e^a \cdot e^b = e^{a+b} \qquad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$
$$(e^a)^b = e^{ab} \qquad \sqrt[b]{e^a} = e^{a/b}$$
$$(e^a)^{-1} = e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$
Lo que justifica su nombre de función *exponencial*, ya que toma las propiedades que cumplen las potencias en su sentido racional. La utilidad de la función exponencial será entonces *extender* el significado de $e^3 = e \cdot e \cdot e$ al que estamos acostumbrados y darle sentido a expresiones del tipo e^π.

La función Logaritmo natural

- La función exponencial es estrictamente creciente y por lo tanto inyectiva. Además, su recorrido son todos los reales positivos. Por lo tanto, la función definida por:
$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$$
Es biyectiva y posee inversa. Definimos esta inversa como la *función Logaritmo natural*:
$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$
De modo que $\ln(x) = y \Leftrightarrow x = \exp(y)$.
- Puesto que son funciones inversas, su composición da la identidad mientras los dominios sean adecuados. Es decir:
$$\forall x > 0,\ \exp(\ln(x)) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x$$
- Tenemos que $\ln(e) = 1$ y $\ln(1) = 0$.
- El logaritmo natural también es una función estrictamente creciente y por lo tanto inyectiva. Además, su recorrido son todos los números reales.
- Se tiene $\forall x, y \in (0, \infty)$ que:
$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$
- El logaritmo cumple con que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\ln(x^r) = r\ln(x)$.

Desigualdades Fundamentales

- La exponencial cumple las siguientes desigualdades:
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \geq x + 1$$
$$\forall x \in (-\infty, 1),\ \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$$
- El logaritmo natural cumple las siguientes desigualdades:
$$\forall x \in (0, \infty),\ 1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$
- Estas desigualdades se pueden volver más fuertes considerando que $\forall k \in \mathbb{N}$:
$$\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{k}\right)\right)^k \geq \left(\frac{x}{k} + 1\right)^k$$
$$\ln(x) = \ln(\sqrt[k]{x}^k) = k\ln(\sqrt[k]{x}) \leq k(\sqrt[k]{x} - 1)$$

Exponente real y generalización de exponenciales y logaritmos.

- A modo de una generalización de la noción de potencia racional, definimos:
$$\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R},\ a^b := \exp(b\ln(a))$$
- Esta definición es consistente con los casos en que $b \in \mathbb{Q}$.
- Como consecuencia de la definición tenemos las siguientes propiedades:
$$\ln(a^b) = b\ln(a) \qquad a^{b+c} = a^b a^c \qquad (a^b)^{-1} = a^{-b}$$
$$(\exp(x))^b = \exp(bx) \qquad (a^b)^c = a^{bc}$$
En particular, $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = e^x$.
- Definimos entonces otras funciones exponenciales y logarítmicas como sigue:
$$\forall a > 0,\ a^x = \exp(x\ln(a))$$
$$\forall a > 0,\ a \neq 1,\ \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$
- Se tiene que a^x y $\log_a(x)$ son funciones inversas entre sí del mismo modo que e^x y $\ln(x)$. Además, el logaritmo en base a cumple las misma propiedades algebráicas que el logaritmo natural, a saber:
$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

- Es directo además que $log_a(a) = 1$ y $\log_a(1) = 0$.
- (Cambio de base) Mientras esté bien definido, tenemos la igualdad:
$$\log_a(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(a)}$$
- Si $a \in (0, 1)$, a^x y $\log_a(x)$ son estrictamente decrecientes.
- Si $a \in (1, \infty)$, a^x y $\log_a(x)$ son estrictamente crecientes.

Límites

- Sea $(a_n) \to a$. Tenemos que:
  - $e^{a_n} \to e^a$
  - $\dfrac{e^{a_n} - e^a}{a_n - a} \to e^a$
- En particular, si $(a_n) \to 0$, tenemos que:
$$\text{lím}\,\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1$$
- Sea $(a_n) \to a$ con a_n y a *positivos*. Tenemos que:
  - $\ln(a_n) \to \ln(a)$
  - $\dfrac{\ln(a_n) - \ln(a)}{a_n - a} \to \dfrac{1}{a}$
- En particular, si $(a_n) \to 1$, tenemos que:
$$\text{lím}\,\frac{\ln(a_n)}{a_n - 1} = 1$$
O de manera equivalente, si $(a_n) \to 0$, tenemos usando la sucesión $(1 + a_n) \to 1$ que:
$$\text{lím}\,\frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1$$
- Sea $(a_n) \to a$. Entonces
$$\text{sen}(a_n) \to \text{sen}(a) \qquad \cos(a_n) \to \cos(a)$$
.