MA1001-1 Introducción al Cálculo, Semestre Primavera
Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliar: Nicolás Tapia Rivas

Auxiliar 11

22 de Octubre de 2014

Recuerdo

1. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$; $\exp(x) := \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$
2. $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$; $\ln(x) = y \Leftrightarrow x = \exp(y)$
3. $\exp(x) = e^x$, donde $e = \exp(1) = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
4. $a^b := \exp(b \ln(a))$
5. $e^x \geq x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$
6. $e^x \leq \frac{1}{1-x}$, $\forall x < 1$
7. $1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$
8. Sea $a_n \to a$ una sucesión con límite a.
   - $e^{a_n} \to e^a$
   - $\ln(a_n) \to \ln(a)$.
   - $\frac{e^{a_n} - e^a}{a_n - a} \to e^a$
   - $\frac{\ln(a_n) - \ln(a)}{a_n - a} \to \frac{1}{a}$

P1. Demuestre que para todo polinomio $p(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_k n^k$ de grado $k \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p(n)}{e^n} = 0$$

Indicación: Pruebe primero que para $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $\lim \frac{n^k}{e^n} = 0$.

P2. Encuentre el límite de las siguientes sucesiones:

1. $\frac{a_n \ln(a_n)}{a_n^2 - 1}$, donde $a_n \to 1$.
2. $e^{-n}\sqrt{n}$. Puede usar que $1/\sqrt{n} \to 0$.
3. $\frac{\ln(n)}{n}$.
4. $n(e^{1/n} - 1)$
5. $\frac{e^{\frac{1}{n}} - e^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}}{\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}$
6. $\left(\frac{n^2 + n - 1}{n^2 - 1}\right)^{n+x}$, con $x \in \mathbb{R}$ fijo.
7. $(1 + x^{-n})^{\ln(n)}$, con $x \in (0, \infty)$. Analice según el valor de x.
8. $\frac{1}{n} \ln\left(\sum_{i=0}^{k} e^{in}\right)$, con $k \in \mathbb{N}$ fijo.

P3. Considere la sucesión:

$$u_n = \frac{n^n}{n! \cdot e^n}$$

Estudie la expresión $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ y concluya si se trata de una sucesión creciente o decreciente. Aplique adecuadamente el Teorema de las Sucesiones Monótonas para concluir sobre su convergencia.