

Auxiliar 9
Solución

P1)

$$1. \quad a_n \rightarrow 1 \quad ; \quad a_n \leq b_n \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{pdq: } b_n \rightarrow 1$$

$$\text{pdq: } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |b_n - 1| \leq \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Puesto que $a_n \rightarrow 1$, para este " ε " existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, 1 - \varepsilon \leq a_n \leq 1 + \varepsilon$. Por lo tanto,

$\forall n \geq n_0'$ tenemos

$$1 - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \quad \wedge \quad b_n \leq 1 \leq 1 + \varepsilon$$

$$\Rightarrow 1 - \varepsilon \leq b_n \leq 1 + \varepsilon$$

$$\Rightarrow |b_n - 1| \leq \varepsilon.$$

Luego, tomando $n_0 = n_0'$, tenemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |b_n - 1| \leq \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se tiene $\forall \varepsilon > 0$ y por lo tanto $b_n \rightarrow 1$.

$$2. \quad a_n \rightarrow L \quad \text{y} \quad |a_n - b_n| \rightarrow 0.$$

$$\text{pdq: } b_n \rightarrow L$$

$$\text{pdq: } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |b_n - L| \leq \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Notemos que

$$|b_n - L| = |b_n - L + a_n - a_n| = |(b_n - a_n) + (a_n - L)| \leq |b_n - a_n| + |a_n - L|$$

$$\Rightarrow |b_n - L| \leq |a_n - b_n| + |a_n - L| \quad (*).$$

Puesto que $|a_n - L| \rightarrow 0$ (ya que $a_n \rightarrow L$), $\exists n_0' \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0', |a_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Puesto que $|a_n - b_n| \rightarrow 0$, $\exists n_0'' \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0'', |a_n - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Para $n_0''' = \max \{n_0', n_0''\}$, tenemos

$$|a_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad |a_n - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad ; \quad \forall n \geq n_0'''$$

$$\Rightarrow |a_n - L| + |a_n - b_n| \leq \varepsilon \quad ; \quad \forall n \geq n_0''' \quad (**)$$

Juntando (*) con (**), por transitividad tenemos

$$|b_n - L| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0''$$

Basta tomar $n_0 = n_0'''$ y tenemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |b_n - L| \leq \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se tiene. $\forall \varepsilon > 0$ y por lo tanto $b_n \rightarrow L$. //

P2] $u_n \rightarrow \frac{1}{2}$. $a_n = [u_n]$

pdq: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n| \leq \varepsilon$.

Puesto que $u_n \rightarrow \frac{1}{2}$, para cualquier $\delta > 0, \exists n_0' \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0'$

$$|u_n - \frac{1}{2}| \leq \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \delta \leq u_n \leq \frac{1}{2} + \delta$$

Impongamos $\frac{1}{2} - \delta > 0$ y $\frac{1}{2} + \delta < 1$. Esto nos conduce a que, para que ocurra esto, $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Tomemos por ej $\delta = \frac{1}{3}$. Luego, $\exists n_0' \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{6} \leq u_n \leq \frac{5}{6}, \quad \forall n \geq n_0'$$

$$\Rightarrow 0 < u_n < 1; \quad \forall n \geq n_0'$$

$$\Rightarrow [u_n] = 0; \quad \forall n \geq n_0'$$

$$\Rightarrow a_n = 0; \quad \forall n \geq n_0'$$

Basta tomar $n_0 = n_0'$, para que, $\forall n \geq n_0'$, se cumpla $|a_n| \leq \varepsilon$, puesto que $a_n = 0$ para estos valores de "n" y $\varepsilon > 0$. Como lo anterior es válido para cualquier $\varepsilon > 0$, se tiene que $a_n \rightarrow 0$.

P3]

$$1.- a_n = \frac{\sin(2^n)}{n^2}$$

- $\sin(2^n)$ es acotada puesto que $|\sin(2^n)| \leq 1. \forall n \in \mathbb{N}$.
- $\frac{1}{n^2}$ es conocidamente nula.

Prop $\Rightarrow$ $\frac{1}{n^2} \cdot \sin(2^n)$ es nula. Luego $a_n \rightarrow 0$.
clases

$$2.- a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$* a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n})^2} = \frac{1}{4n}$$

Como $\frac{1}{n}$ es conocidamente nula, $\frac{1}{4n}$ también lo es. Puesto que

$$|a_n| = a_n \leq \frac{1}{4n} ; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se concluye que a_n es nula. Luego $a_n \rightarrow 0$.

$$3.- a_n = n \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right]$$

$$* a_n = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = n \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

Puesto que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ y $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1$. Además

numerador: $1 \rightarrow 1$

denominador: $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \rightarrow 2 \neq 0$

$\Rightarrow a_n \rightarrow \frac{1}{2}$ [Todo lo anterior se justifica en álgebra de límites].

$$4. a_n = \frac{(-1)^n}{n^3} + \sqrt{n^2 + n} - n$$

Notemos que a_n se puede escribir como

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^3} + n \left(\frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} - 1 \right)$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^3} + n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$$

• Como $(-1)^n$ es conocidamente acotada ($(-1)^n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$) y $\frac{1}{n^3}$ es nula, tenemos nula por acotada = nula. Luego $\frac{(-1)^n}{n^3} \rightarrow 0$.

• Sabemos que $n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \rightarrow \frac{1}{2}$

• Por álgebra de límites se concluye

$$a_n \rightarrow 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

P4]

1. pdq: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,$

$$\left| \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2 + 1} - \frac{2}{3} \right| \leq \varepsilon$$

Demostración:

$$\left| \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2 + 1} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{q_{n+1}}{q_{n^2+3}} \right| = \frac{q_{n+1}}{q_{n^2+3}}.$$

Forma A: Sea $\varepsilon > 0$ (arbitrario).

$$\frac{q_{n+1}}{q_{n^2+3}} \leq \frac{q_{n+1}}{q_{n^2}} = \frac{1}{n} + \frac{1}{q_{n^2}}.$$

Forma modificada de la P.A.

P.A. nos dice que $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \varepsilon n > 1$. Pero $n^k \geq n, \forall k \in \mathbb{N}$, luego.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \varepsilon n^k > 1.$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{n^k} < \varepsilon.$$

• Para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, por P.A. $\exists n_0' \in \mathbb{N}, \frac{1}{n_0'} < \frac{\varepsilon}{2}$. Puesto que $n \geq n_0' \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0'}$, se tiene que $\exists n_0' \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0', \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

• Para $\frac{9\varepsilon}{2} > 0$, por P.A. $\exists n_0'' \in \mathbb{N}, \frac{1}{n_0''^2} < \frac{9\varepsilon}{2}$. Puesto que $n \geq n_0'' \Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n_0''^2}$, se tiene que $\exists n_0'' \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0'', \frac{1}{n^2} < \frac{9\varepsilon}{2}$.

Luego, para $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$, se tiene, $\forall n \geq n_0$

$$\left| \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2 + 1} - \frac{2}{3} \right| = \frac{q_{n+1}}{q_{n^2+3}} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{q_{n^2}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{9\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow \left| \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2 + 1} - \frac{2}{3} \right| \leq \varepsilon$; $\forall \varepsilon > 0$ este procedimiento es válido, por lo que se tiene lo pedido.

Forma B : Sea $\varepsilon > 0$ (arbitrario) [despejar "n" y ver casos]

$$\frac{q_{n+1}}{q_n^2+3} \leq \varepsilon \Leftrightarrow q_{n+1} \leq q_n^2 \varepsilon + 3\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq q_n^2 \varepsilon - q_n + (3\varepsilon - 1)$$

Tomando esto como una desigualdad para n, tenemos que esta se cumplirá para aquellos valores de n en que la parábola esté sobre el eje X. El discriminante es:

$$\Delta = q^2 - 4 \cdot q_n (3\varepsilon - 1)$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow q - 4\varepsilon(3\varepsilon - 1) < 0$$

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow q - 4\varepsilon(3\varepsilon - 1) \geq 0.$$

Notamos de inmediato que Δ depende del " ε " escogido. Esto no es una contradicción puesto que:

Si $\varepsilon > 0$ es tal que $\Delta < 0$:

Entonces $q_n^2 \varepsilon - q_n + (3\varepsilon - 1) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Luego basta tomar cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$ y se tendrá que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$.

$$q_n^2 \varepsilon - q_n + (3\varepsilon - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{q_{n+1}}{q_n^2+3} \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{2n^2+3n+1}{3n^2+1} - \frac{2}{3} \right| \leq \varepsilon.$$

Si $\varepsilon > 0$ es tal que $\Delta \geq 0$

Entonces $q_n^2 \varepsilon - q_n + (3\varepsilon - 1) \geq 0 \Leftrightarrow n \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$ donde.

$$x_{1,2} = \frac{q \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot q_n} \quad (x_1 \text{ con "-" y } x_2 \text{ con "+"}). \text{ Luego tomando}$$

$n_0 = [x_2] + 1$, tendremos $n \geq n_0 \Rightarrow n \in [x_2, \infty)$ y luego $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$,

$$q_n^2 \varepsilon - q_n + (3\varepsilon - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \left| \frac{2n^2+3n+1}{3n^2+1} - \frac{2}{3} \right| \leq \varepsilon.$$

Juntando ambos casos, tendremos que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$

$$\left| \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2 + 1} - \frac{2}{3} \right| \leq \varepsilon //$$

2.- pdq: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$

$$\left| \frac{4n^3 + 2n^2 - 8n + 1}{2n^3 + 1} - 2 \right| \leq \varepsilon.$$

Demostración: (Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario).

$$\left| \frac{4n^3 + 2n^2 - 8n + 1}{2n^3 + 1} - 2 \right| = \left| \frac{2n^2 - 8n - 1}{2n^3 + 1} \right| = \frac{|2n^2 - 8n - 1|}{2n^3 + 1} \leq \frac{|2n^2 - 8n - 1|}{2n^3}$$

Sea $n'_0 \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande de modo que $2n^2 - 8n - 1 \geq 0$. Luego, para $n \geq n'_0$,

$$\left| \frac{4n^3 + 2n^2 - 8n + 1}{2n^3 + 1} - 2 \right| \leq \frac{2n^2 - 8n - 1}{2n^3} = \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} - \frac{1}{2n^3} \leq \frac{1}{n}.$$

Por la P.A. Para $\varepsilon > 0, \exists n''_0 \in \mathbb{N}, \varepsilon n''_0 > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n''_0} < \varepsilon$. Puesto que

$n \geq n''_0 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n''_0}$, se tiene que $\exists n''_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n''_0, \frac{1}{n} \leq \varepsilon$.

Si tomamos $n_0 = \max \{n'_0, n''_0\}$, se tendrá que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$.

$$\left| \frac{4n^3 + 2n^2 - 8n + 1}{2n^3 + 1} - 2 \right| \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{4n^3 + 2n^2 - 8n + 1}{2n^3 + 1} - 2 \right| \leq \varepsilon.$$

Como es válido para cualquier $\varepsilon > 0$, se tiene lo pedido. //

(Para acotar $\frac{1}{n}$ por ε : a partir de un n''_0 , se podría establecer $\frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq n$ y tomar $n''_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, con lo que $\forall n \geq n''_0, \frac{1}{n} \leq \varepsilon$).