

Auxiliar 8

Solución

P1) a) Supondremos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Es rápido ver que

$$0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Y que justamente 0 y 1 son buenos candidatos a sup e inf.

• Existencia

Ya establecimos que B es acotado. Además $\frac{1}{2} \in B$ por lo que $B \neq \emptyset$.
En virtud del axioma del supremo, existen $\sup(B)$ y $\inf(B)$.

• Como $0 \in B$ [basta tomar $n=0$], 0 es cota inferior que pertenece al conjunto y por lo tanto $0 = \min(B)$. Por prop vista en clases, $\inf(B) = \min(B) = 0$. Por def de infimo, si c es cota inferior, entonces $c \leq \inf(B) = 0$. Luego el cto de todas las c inf. es $(-\infty, 0]$.

• pdg: $\sup(B) = 1$.

Ya vimos que 1 es c. sup. Supongamos que no es el supremo, ie, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n}{n+1} \leq 1 - \varepsilon$. (una cota "más chica").

$$\text{Pero } \frac{n}{n+1} \leq 1 - \varepsilon \Leftrightarrow n \leq n - n\varepsilon + 1 - \varepsilon \Leftrightarrow (n+1)\varepsilon \leq 1$$

lo cual, ya que $n+1 > n$, implica que $n\varepsilon \leq 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$. Esto contradice la P.A., la cual establece que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \varepsilon n_0 > 1$. Luego tal cota "más" chica no puede existir y por ende $1 = \sup(B)$.

b) $A = \{ s+t : 0 \leq s < 1; 0 \leq t < 1 \}.$

Al sumar las desigualdades notamos que $0 \leq s+t < 2$. Luego A es acotado y además $0 \in A$ ($s=0 \wedge t=0$) con lo que $A \neq \emptyset$. Luego, en virtud del ax. del supremo, existen $\sup(A)$ y $\inf(A)$.

Puesto que $0 \in A$ y 0 es c.inf, $0 = \min(A)$ y por lo tanto $\inf(A) = \min(A) = 0$. Para el supremo usamos el candidato más evidente:

pdq: $\sup(A) = 2$

Ya vimos que 2 es c.sup. Supongamos que no es el supremo, ie, $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A, x \leq 2 - \varepsilon$, lo que es equivalente a.

$$\forall s \in [0,1), \forall t \in [0,1); s+t \leq 2 - \varepsilon; \text{ para algún } \varepsilon > 0.$$

Para echar abajo esto, basta encontrar valores s_0 y $t_0 \in [0,1)$ tales que $s_0 + t_0 > 2 - \varepsilon$ (es decir, que a $2 - \varepsilon$ "se le pasa" un $x \in A$).

Notemos que $\varepsilon \in (0,2]$ puesto que sabemos que $\forall x \in A, x \geq 0$ y por ende $2 - \varepsilon < 0$ no puede ser una cota superior. Por lo tanto

$$\frac{\varepsilon}{2} \in (0,1] \text{ y podemos elegir } s = t = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \in [0,1) \text{ de modo que}$$

$s+t = 2 - \varepsilon$. Puesto que nosotros nos queremos "pasar", podemos, por ejemplo, sumar una cantidad pequeña a t . Es decir, busquemos sumar $\delta > 0$ tal que $t = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \delta \in [0,1)$. En particular nos

preocupa

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} + \delta < 1 \Leftrightarrow \delta < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \delta \in (0, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Si tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ (puede ser cualquiera), tenemos

$$s_0 = 1 - \frac{\varepsilon}{2}; \quad t_0 = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} = 1 - \frac{\varepsilon}{6}$$

$$\Rightarrow s_0 + t_0 = 2 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{6} = 2 - \frac{2}{3}\varepsilon > 2 - \varepsilon$$

Puesto que $(s_0 + t_0) \in A$, esto es una contradicción con el hecho de que $(2 - \varepsilon)$ es cota superior. Luego tal "cota más chica" no puede existir y por ende $2 = \sup(A)$. Puesto que $s+t < 2, 2 \notin A$ y A no posee máximo.

c)

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (\forall \varepsilon > 0) \ x < b + \varepsilon\}.$$

Basta tomar algún $\varepsilon_0 > 0$ fijo y tendremos que

$$x < b + \varepsilon_0, \forall x \in A.$$

Es decir, el real $(b + \varepsilon_0)$ es cota superior. Además $b \in A$ puesto que

$$(\forall \varepsilon > 0) \ b < b + \varepsilon \iff (\forall \varepsilon > 0) \ 0 < \varepsilon$$

Lo cual es trivialmente verdadero. Luego $A \neq \emptyset$ y acot. sup. y por el axioma del supremo, existe $\sup(A)$. Para encontrar su valor, notemos que $b \in A$ y además es cota sup. (y por ende es máximo).

pdq: b es cota superior.

Supongamos que no. Es decir, $\exists x \in A$ tal que $x > b$. Por densidad de los reales esto implica que $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $x > c > b$. Como $c > b$, podemos escribirlo como $c = b + \varepsilon$, con $\varepsilon = c - b > 0$. Es decir,

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } x > b + \varepsilon \not\Rightarrow x \in A \Rightarrow x < b + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0. \text{ Luego}$$

b es cota superior.

Puesto que b es cot. sup. y $b \in A$, $b = \max\{A\}$ y $\sup(A) = \max(A) = b$.

P2) Puesto que $A \neq \emptyset$ y es acot. sup. posee supremo.

a) Supongamos que posee máximo, ie, $\exists M \in A$ tal que
 $M \geq x ; \forall x \in A.$

Pero $M \in A \Rightarrow \exists y \in A, M < y$ $\star$. Luego no posee máximo.

Puesto que nos dicen que
 $(\forall x \in A)(\exists y \in A) x < y.$

b) Puesto que $(\exists y \in A)(\forall x \in A) x \leq y$, entonces y es cot. sup. Como $y \in A$,
 $y = \max(A).$

P3) a) $A, B \neq \emptyset$. Puesto que B es acotado, existe $\sup(B)$. Puesto que
 $A \subseteq B, x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \leq M$, para algún M (por ser B acotado).
Luego, $\forall x \in A, x \leq M \Leftrightarrow A$ es acotado. Luego existe $\sup(A)$.

Por definición, $\forall x \in B, x \leq \sup(B)$. Puesto que $x \in A \Rightarrow x \in B$, tenemos
 $\forall x \in A, x \leq \sup(B)$

Es decir, $\sup(B)$ es cota superior de A . Luego por definición $\sup(A) \leq \sup(B) //$

b) Supongamos que $V, W \neq \emptyset$. Notemos que si fijamos $y_0 \in W$, tenemos

$\forall x \in V, x \leq -y_0$. ie, $(-y_0)$ es cota sup. y V es acot. sup. Si fijamos $x_0 \in V$,
tenemos $\forall x \in W, y \leq -x_0$, ie, $(-x_0)$ es cota sup. y W es acot. sup. Luego
 $\sup(V)$ y $\sup(W)$ existen. Rebotando lo anterior, ya que
 $y_0 \in W$ cumple con que $(-y_0)$ es cota sup. de V , necesariamente $\sup(V) \leq -y_0$.
Como lo anterior es para un y_0 arbitrario, tenemos en realidad
que $\forall y \in W, y \leq -\sup(V) \Rightarrow -\sup(V)$ es cota sup. de W y necesariamente
 $\sup(W) \leq -\sup(V) \Rightarrow \sup(V) + \sup(W) \leq 0 //$

c) $A, B \neq \emptyset$. y acot sup $\Rightarrow$ $\sup(A)$ y $\sup(B)$ existen.

$A, B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B \neq \emptyset$. Además, A y B acot. sup. implican que

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \leq M_A \vee x \leq M_B$$

Para algunos M_A y M_B en $\mathbb{R}$. Si $M = \max \{M_A, M_B\}$, entonces

$$M_A \leq M \text{ y } M_B \leq M, \text{ y:}$$

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \leq M_A \vee x \leq M_B \Rightarrow x \leq M$$

Como esto es $\forall x \in A \cup B$, $A \cup B$ resulta ser acotado sup. y existe su supremo.

$$\text{pdq: } \sup(A \cup B) = \max \{ \sup(A), \sup(B) \}$$

Parte 1: $\sup(A \cup B) \leq \max \{ \sup(A), \sup(B) \}$.

$$\forall x \in A \cup B \text{ se cumple } x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \leq \sup(A) \vee x \leq \sup(B)$$

$$\Rightarrow x \leq \max \{ \sup(A), \sup(B) \}$$

$$\Rightarrow \max \{ \sup(A), \sup(B) \} \text{ es cota sup de } A \cup B$$

Luego necesariamente $\sup(A \cup B) \leq \max \{ \sup(A), \sup(B) \}$

Parte 2: $\sup(A \cup B) \geq \max \{ \sup(A), \sup(B) \}$

$$\bullet \forall x \in A \text{ se cumple } x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \leq \sup(A \cup B)$$

$$\Rightarrow \sup(A \cup B) \text{ es cota sup de } A$$

Luego necesariamente $\sup(A) \leq \sup(A \cup B)$.

$$\bullet \forall x \in B \text{ se cumple } x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \leq \sup(A \cup B)$$

$$\Rightarrow \sup(A \cup B) \text{ es cota sup de } B$$

Luego necesariamente $\sup(B) \leq \sup(A \cup B)$

$$\Rightarrow \max \{ \sup(A), \sup(B) \} \leq \sup(A \cup B).$$

Puesto que se tiene $\sup(A \cup B) \leq \max \{ \dots \} \wedge \sup(A \cup B) \geq \max \{ \dots \}$, necesariamente

$$\sup(A \cup B) = \max \{ \sup(A), \sup(B) \} //$$