MA1001-1 Introducción al Cálculo, Semestre Primavera
Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliar: Nicolás Tapia Rivas

Resumen Semanas 9 y 10

Sucesiones

1. Llamaremos *sucesión* a cualquier función real con dominio en $\mathbb{N}$.
2. Por notación, a las sucesiones se les designará por las letras s, u, v, w, a, b, c, etc. en lugar de f y a la imagen de n por s_n en lugar de $s(n)$.
3. La imagen de n se llama *término* n de la sucesión.
4. Por lo general, nos preocuparán los valores grandes de n, por lo que indefiniciones para los primeros valores de n no se tomarán en cuenta.
5. Diremos que una sucesión (s_n) *converge* al real l, o bien que s_n *tiende* a l ($s_n \to l$) ssi:
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |s_n - l| \leq \varepsilon$$
Puesto que $|s_n - l|$ se puede interpretar como la distancia entre dos números reales, diremos que $s_n \to l$ cuando la distancia entre s_n y l se puede hacer todo lo pequeña que queramos, escogiendo un instante adecuado $n_0 \in \mathbb{N}$.
6. Por lo anterior, nos preocuparán los valores pequeños de ε en la proposición de convergencia. Esto es así puesto que si la proposición es válida para un cierto ε_0, entonces para cualquier $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ se tiene que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ dado por ε_0 tal que
$$|s_n - l| \leq \varepsilon_0 \leq \varepsilon \Rightarrow |s_n - l| \leq \varepsilon$$
para todo $n \geq n_0$. Es decir, también la proposición es válida para ε.
7. Una sucesión es *convergente* cuando converge a algún $l \in \mathbb{R}$. De lo contrario, la sucesión se dirá *divergente*.
8. Si una sucesión es convergente, lo hace a un *único* real. Por este motivo, tal real se denomina el *límite* de s_n, lo cual se anota como $\lim s_n = l$.
9. s_n es nula si $s_n \to 0$.
10. s_n es acotada si $(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ |s_n| \leq M$.
11. **Álgebra de sucesiones nulas y acotadas:**
    - u_n NULA $\Leftrightarrow |u_n|$ NULA.
    - NULA también es ACOTADA.
    - u_n NULA y $|v_n| \leq u_n \Rightarrow v_n$ NULA.
    - Suma y producto de NULAS resulta en una NULA.
    - Suma y producto de ACOTADAS resulta en una ACOTADA.
    - NULA por ACOTADA resulta en una NULA.
12. $s_n \to l \Leftrightarrow |s_n - l| \to 0$. Por lo tanto, toda sucesión convergente también es acotada.
13. **Álgebra de límites:** Si $u_n \to u$ y $v_n \to v$ entonces:
    - $(u_n \pm v_n) \to u \pm v$.
    - $(u_n \cdot v_n) \to u \cdot v$.
    - $(\lambda u_n) \to \lambda u$; $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - $(u_n / v_n) \to u/v$; si $v \neq 0$.
14. s_n nula $\Rightarrow 1/s_n$ no acotada y por ende divergente.
15. $s_n \to l,\ l \neq 0 \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ s_n \cdot l > 0$. Es decir, desde algún instante en adelante la sucesión tiene el mismo signo que su límite.

Teorema del Sandwich

1. Si $u_n \to u$ y $w_n \to w$, y además $u_n \leq w_n$ a partir de algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces $u \leq w$.
2. (Teorema del Sandwich) Sean (u_n), (v_n) y (w_n) tales que a partir de algún $n_0 \in \mathbb{N}$ se cumple:
$$u_n \leq v_n \leq w_n$$
Si $u_n \to l$ y $w_n \to l$, entonces $v_n \to l$.
3. Si $h_n \to 0$ y $nh_n \to 0$, entonces $(1 + h_n)^n \to 1$.

Teorema de las Sucesiones Monótonas

1. Diremos que (s_n) es *creciente* si $s_{n+1} \geq s_n$ a partir de algún $n_0 \in \mathbb{N}$.
2. Diremos que (s_n) es *decreciente* si $s_{n+1} \leq s_n$ a partir de algún $n_0 \in \mathbb{N}$.
3. De manera análoga a las funciones, el crecimiento se dirá estricto si la desigualdad se cumple de manera estricta.
4. Una sucesión que es (estrictamente) creciente o (estrictamente) decreciente se dirá sucesión *monótona*.
5. (Teorema de las Sucesiones Monótonas) Si (s_n) es monótona y acotada, entonces converge. De manera específica:
    - Si (s_n) es creciente (a partir de algún $n_0 \in \mathbb{N}$) y acotada superiormente, entonces converge y de tal modo que:
    $$\lim s_n = \sup\{s_n : n \geq n_0\}$$
    - Si (s_n) es decreciente (a partir de algún $n_0 \in \mathbb{N}$) y acotada inferiormente, entonces converge y de tal modo que:
    $$\lim s_n = \inf\{s_n : n \geq n_0\}$$

Sucesiones importantes

1. $s_n = a \to a$ con $a \in \mathbb{R}$.
2. $s_n = n^k$ es divergente y no acotada para $k \in \mathbb{N}$.
3. $s_n = (-1)^n$ es divergente y acotada.
4. $s_n = \dfrac{1}{n^k} \to 0$ para $k \in \mathbb{N}$
5. $s_n = \dfrac{a_p n^p + \cdots + a_0}{b_q n^q + \cdots + b_0} \to \begin{cases} 0 & \text{Si } p < q \\ a_p/b_q & \text{Si } p = q \\ \nexists & \text{Si } p > q \end{cases}$
6. $s_n = \dfrac{n!}{n^n} \to 0$
7. $s_n = \dfrac{a^n}{n!} \to 0$ para $a \in \mathbb{R}$
8. Sea $q \in \mathbb{R}$. $q^n \to \begin{cases} 1 & \text{Si } q = 1 \\ 0 & \text{Si } |q| < 1 \\ \nexists & \text{Si } q = (-1) \vee |q| > 1 \end{cases}$
9. Sea $q_n \to q$. $q_n^n \to \begin{cases} 0 & \text{Si } |q| < 1 \\ \nexists & \text{Si } |q| > 1 \end{cases}$
10. Sea $a > 0$. $\sqrt[n]{a} \to 1$.
11. Sea $a_n \to a$ con $a > 0$. $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.
12. $s_n = \sqrt[n]{n} \to 1$
13. $s_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$
14. $s_n = n^k q^n \to 0$ cuando $k \in \mathbb{N}$ y $|q| < 1$.
15. $s_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ es creciente y acotada superiormente, por lo tanto converge. Su límite se denotará por e donde $2 \leq e \leq 4$. $e \approx 2,718281828\ldots$.