MA1001-1 Introducción al Cálculo, Semestre Primavera
Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliar: Nicolás Tapia Rivas

Resumen Semanas 6 y 7

Ángulo

1. Apelando a la noción intuitiva de lo que es un ángulo, se define simplemente el ángulo *positivo* como aquél que es medido en el sentido antihorario, y *negativo* como aquél que es medido en el sentido horario.
2. La magnitud del ángulo se mide en *radianes*. Si se dibuja una circunferencia centrada en el vértice del ángulo, su magnitud se obtiene como el cuociente entre la longitud del radio y la longitud del arco de circunferencia comprendido por el ángulo.
3. Los radianes son números reales (a diferencia de los grados del sistema de 360°).

Funciones trigonométricas

1. Consideremos el gráfico de $x^2 + y^2 = 1$ (circunferencia unitaria). Supongamos que, partiendo de la parte positiva del eje OX, describimos un ángulo de magnitud x, determinando un punto P_x en la circunferencia. Decimos que P_x tiene coordenadas $(\cos(x), \sin(x))$.
2. Función Coseno: Se designa por $\cos(x)$ y es una función par.
3. Función Seno: Se designa por $\sin(x)$ y es una función impar.
4. Función Tangente: Se designa por $\tan(x)$ y se define como:
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
5. Es inmediato de la circunferencia unitaria que
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$
Esta es la *identidad fundamental de la trigonometría*.
6. Las funciones seno y coseno están definidas en todo $\mathbb{R}$, con recorrido igual a $[-1, 1]$. La función tangente está definida en todo $\mathbb{R}$ a excepción de los puntos en donde se anula el coseno, con recorrido igual a $\mathbb{R}$. La gráfica de la función tangente presenta asíntotas verticales en estos puntos.
7. Seno y coseno son de período 2π y la tangente de período π (corresponde al período mínimo).
8. Se definen las funciones recíprocas cotangente, secante y cosecante como:
$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$
9. De la identidad fundamental se extrae que:
$$\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$
$$\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$$
10. Se tienen las siguientes identidades de extrema utilidad trigonométrica:
$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$
11. De las identidades anteriores se extrae el siguiente caso particular $a = b$:
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(b)$$
$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$
12. El coseno del ángulo doble puede ser escrito convenientemente usando la identidad fundamental como:
$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

Funciones trigonométricas inversas

1. Restringiendo los dominios y codominios de las funciones trigonométricas es posible obtener funciones inversas.
2. Se define el arcoseno como
$$\operatorname{arc\,sen} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$
Donde $y = \operatorname{arc\,sen}(x) \Leftrightarrow x = \sin(y)$.
3. Se define el arcocoseno como
$$\operatorname{arc\,cos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
Donde $y = \operatorname{arc\,cos}(x) \Leftrightarrow x = \cos(y)$.
4. Se define la arcotangente como
$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$
Donde $y = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)$.
5. En pocas palabras, cada una de estas arcofunciones nos entrega un ángulo comprendido cerca de 0 cuya función trigonométrica vale x. Esto brinda una herramienta para resolver ecuaciones.

Ecuaciones trigonométricas

1. Para resolver ecuaciones de la forma:
$$\sin(x) = a \quad \cos(x) = a \quad \tan(x) = a$$
con $a \in \mathbb{R}$, podemos *despejar* utilizando las arcofunciones correspondientes. Utilizar la arcofunción nos entrega el valor del ángulo cuyo seno/coseno/tangente es a. Dada la periodicidad de las funciones, si existe solución, no es única, por lo que la arcofunción no resolverá completamente la ecuación. Sin embargo, una vez encontrada *una* solución, podemos expresarlas todas.
2. Si β es una solución de $\sin(x) = a$, entonces la solución general es:
$$x = k\pi + (-1)^k\beta,\ k \in \mathbb{Z}$$
3. Si β es una solución de $\cos(x) = a$, entonces la solución general es:
$$x = 2k\pi \pm \beta,\ k \in \mathbb{Z}$$
4. Si β es una solución de $\tan(x) = a$, entonces la solución general es:
$$x = k\pi + \beta,\ k \in \mathbb{Z}$$
5. Note que $\sin(x) = a$ y $\cos(x) = a$ solo tienen solución si $|a| \leq 1$.
6. Resolver una ecuación que involucre funciones trigonométricas se reduce a obtener casos elementales de la forma $\sin(x) = a$, $\cos(x) = a$ o $\tan(x) = a$ que ya sabemos resolver.

Trigonometría en triángulos

1. Consideremos un triángulo cualquiera de vértices ABC. Designamos por α, β y γ a los ángulos interiores del triángulo con vértice en A, B y C respectivamente. Además, por oposición a los vértices designamos a las longitudes de los lados por $BC = a$, $AC = b$ y $AB = c$.

2. Si el triángulo es rectángulo en C (es decir, $\gamma = \pi/2$), entonces tenemos las siguientes relaciones entre los catetos y la hipotenusa:
$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$
$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} \quad \cos(\beta) = \frac{a}{c} \quad \tan(\beta) = \frac{b}{a}$$
3. Note que $\sin(\alpha) = \cos(\beta)$ y $\sin(\beta) = \cos(\alpha)$.
4. En general, una regla mnemotécnica útil es que el seno es el *cateto opuesto* partido en la *hipotenusa*, que el coseno es el *cateto adyacente* partido en la *hipotenusa*, y que la tangente es el *cateto opuesto* partido en el *cateto adyacente*.
5. En un triángulo cualquiera siempre se cumple que:
$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$
Esto se conoce como el *Teorema del Seno*.
6. En un triángulo cualquiera siempre se cumple que:
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$
Esto se conoce como el *Teorema del Coseno*. Note que si el triángulo es rectángulo en C, entonces $\cos(\gamma) = 0$ y se obtiene el Teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$. El Teorema del Coseno es una suerte de generalización del Teorema de Pitágoras.