MA1001-1 Introducción al Cálculo, Semestre Primavera
Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliar: Nicolás Tapia Rivas

Resumen Semana 5

Funciones reales de variable real

1. $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice una *función* real de variable real si $(\forall x \in A)(\exists!\ y \in \mathbb{R})$ tal que $y = f(x)$.
2. $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} | y = f(x) \in \mathbb{R}\}$. Es decir, el Dominio de una función es el conjunto de aquellos valores a los cuales asigna elementos en el Codominio.
3. Si no se especifica el Dominio, se asumirá que éste está compuesto por el subconjunto real *más grande* en donde la función esté bien definida.
4. $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) | x \in \mathrm{Dom}(f)\}$. Es decir, la Imagen o Recorrido de una función es el conjunto de aquellos valores a los cuales la función efectivamente *toma todos los valores*.
5. Si $x \in \mathrm{Dom}(f)$ es tal que $f(x) = 0$, decimos que x es un *cero* o *raíz* de f.
6. Paridad de una función:
   - Para que una función tenga paridad, en primer lugar debe cumplir que, si $x \in \mathrm{Dom}(f)$, entonces también $(-x) \in \mathrm{Dom}(f)$.
   - Si $f(-x) = f(x),\ \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$, decimos que f es *función par*.
   - Si $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$, decimos que f es *función impar*.
   - Si f es par, entonces su gráfico es simétrico respecto al eje OY. Si es impar, entonces su gráfico es simétrico respecto al origen (esto es, una rotación respecto al origen de media vuelta). Por lo tanto, el estudio de su gráfico puede restringirse a $[0, \infty)$.
7. Si $\exists p \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(x + p) = f(x),\ \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$, decimos que f es *función periódica* y p es el *período* de f. Al mínimo valor de p se le denomina *período mínimo*.
8. Que una función sea periódica significa que su gráfico en $[0, p]$ se repite infinitamente hacia los lados, por lo que su estudio puede restringirse a este intervalo.
9. f se dice *creciente* en A ssi $(\forall x_1, x_2 \in A)$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$
10. f se dice *decreciente* en A ssi $(\forall x_1, x_2 \in A)$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$
11. Si $A = \mathrm{Dom}(f)$, f simplemente se dice creciente o decreciente, según corresponda. En tal caso decimos que f es *monótona*.
12. Si las desigualdades entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ se cumplen de manera estricta (es decir, sin igualdad), decimos que f es *estrictamente creciente* o *estrictamente decreciente* segun corresponda.
13. Acotamiento:
   - f es *acotada superiormente* si $f(x) \le a, \forall x$, para algún $a \in \mathbb{R}$.
   - f es *acotada inferiormente* si $f(x) \ge a, \forall x$, para algún $a \in \mathbb{R}$.
   - f es *acotada* si lo es tanto superior como inferiormente.
   - Equivalentemente, f es *acotada* ssi $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tal que $|f(x)| \le M, \forall x$
14. Una función polinómica es de la forma
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
con $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ constantes, $a_n \neq 0$. Su dominio es $\mathbb{R}$ y n se dice el *grado* del polinomio.
15. Una función racional es un cuociente de dos funciones polinómicas. Es decir:
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$
con $P(x)$ y $Q(x)$ funciones polinómicas de grados n y m respectivamente. Su dominio es $\mathbb{R}$ con excepción de los puntos en que el denominador se anula.
16. Una función racional puede presentar *asíntotas*.
17. *Asíntota Vertical*: Si x_0 es un cero de Q y no de P, entonces la recta $x = x_0$ es *asíntota vertical* de f. La función crece o decrece sin cotas a medida que se aproxima a estas rectas (en forma más coloquial, *se va a* ∞ o *se va a* $-\infty$).
18. *Asíntota Horizontal*: Sean n y m los grados del numerador y el denominador, respectivamente. Si $n = m$, entonces la recta $y = a_n/b_m$ es *asíntota horizontal* de f. En cambio, si $n < m$, la asíntota horizontal es $y = 0$. La función se aproxima a estas rectas cuando la magnitud $|x|$ es muy grande (es decir, hacia la izquierda y hacia la derecha, el gráfico de la función continúa su camino *siguiendo* a estas rectas). Es importante recalcar que esto no tiene ninguna relación con el comportamiento de la función para valores pequeños de $|x|$. Además, si $n > m$ la función no posee asíntotas horizontales.
19. Si f y g son funciones reales, se define la *composición* de f y g como la función real $g \circ f$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Es decir, primero se evalúa la función f, y el valor entregado $f(x)$ es entregado a g. Por ejemplo, si $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 + 1$, entonces:
$$g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 1$$
20. Una función f se dice inyectiva si las imágenes no se repiten. Formalmente:
$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f),\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
21. Una función f se dice sobreyectiva o epiyectiva si todo el Codominio es ocupado ($\mathrm{Codom}(f) = \mathrm{Im}(f)$). Formalmente:
$$\forall y \in \mathrm{Codom}(f),\ \exists x \in \mathrm{Dom}(f),\ y = f(x)$$
22. Una función f se dice biyectiva si es inyectiva y epiyectiva a la vez. Una función biyectiva posee una *función inversa* f^{-1} tal que $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$. En otras palabras, la función inversa hace el camino de regreso, desde el Codominio de f al Dominio de f.