

Auxiliar 6

Solución

P1]

Asíntotas Horizontales

$$f_1 = \frac{2x^2 - 2x - 4}{x^2 + x - 12} \left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{grado } 2 \\ \rightarrow \text{grado } 2 \end{array} \right\} \text{grados iguales} \Rightarrow y = \frac{2}{1} = 2 \text{ es as. h.}$$

$$f_2 = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{grado } 2 \\ \rightarrow \text{grado } 1 \end{array} \right\} \text{grado mayor en } \rightarrow \text{no hay as. h.}$$

numerador

$$f_3 = \frac{1}{x^2 - 8x + 16} \left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{grado } 0 \\ \rightarrow \text{grado } 2 \end{array} \right\} \text{grado mayor en } \Rightarrow y = 0 \text{ es as. h.}$$

denominador

$$f_4 = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1} \left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{grado } 3 \\ \rightarrow \text{grado } 2 \end{array} \right\} \text{grado mayor en } \Rightarrow \text{no hay as. h.}$$

numerador

Asíntotas Verticales

$$f_1 = \frac{2x^2 - 2x - 4}{x^2 + x - 12} = \frac{2(x^2 - x - 2)}{(x+4)(x-3)} = \frac{2(x-2)(x+1)}{(x+4)(x-3)}$$

Ceros del denominador: -4 y 3. Como no son ceros del numerador, las as. v. son $x = -4$ y $x = 3$.

$$f_2 = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} ; \text{ceros del denominador: } 1.$$

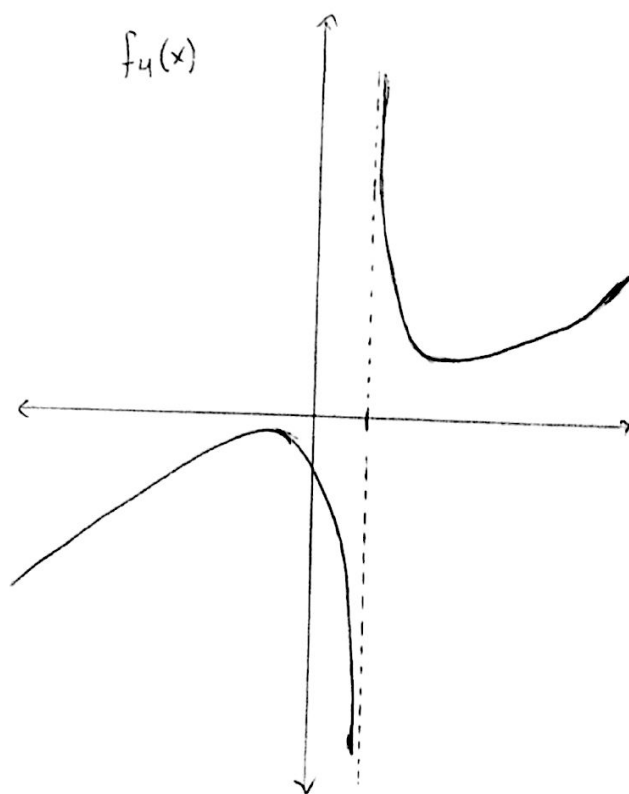
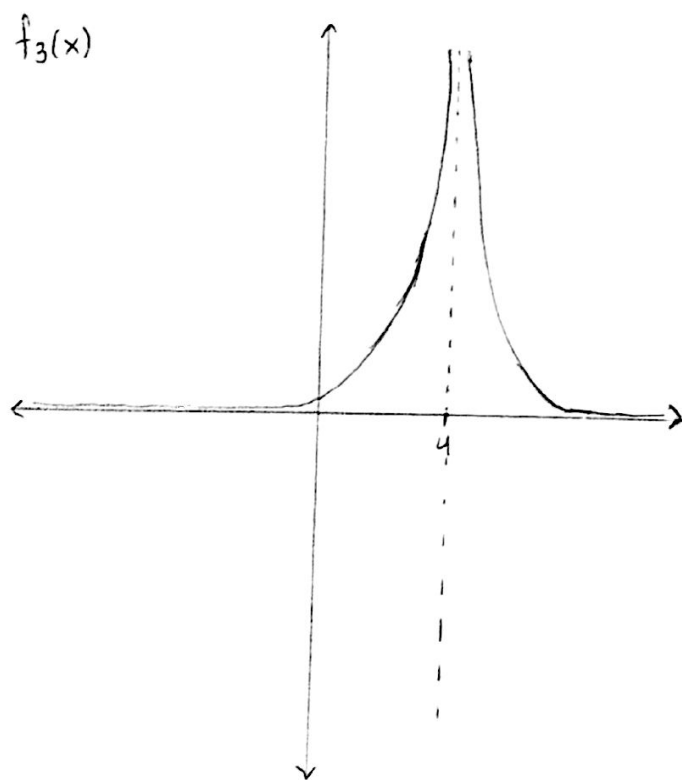
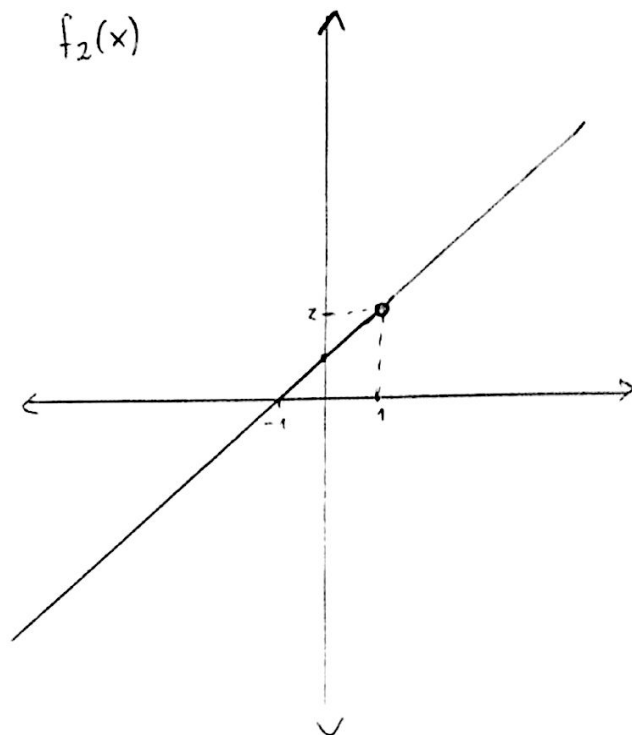
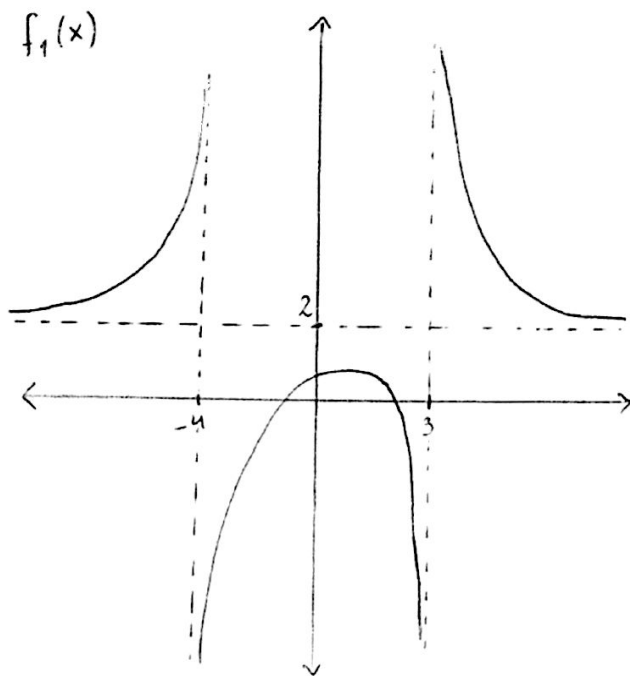
Como también es cero del numerador, no hay as. v.

$$f_3 = \frac{1}{x^2 - 8x + 16} = \frac{1}{(x-4)^2} ; \text{ceros del denominador: } 4; 4. \text{ Como no es cero del numerador, } x = 4 \text{ es as. v.}$$

$$f_4 = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)^2} ; \text{ceros del denominador: } 1; 1.$$

en el numerador, $x = 1$ es también cero, pero solo una vez (en el denominador es 2 veces). Por eso, aún queda un "1" para que $x = 1$ sea as. v.

Bosquejo de las gráficas:



P2)

$$1- g(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 4x - 6}$$

Domínio

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 4x - 6} = \frac{x^2 - 2x + 3}{2(x^2 - 2x - 3)} = \frac{x^2 - 2x + 3}{2(x-3)(x+1)}$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$$

$\Rightarrow x \neq 3, x \neq -1$. (note que son asíntotas verticales).

$$\Rightarrow \text{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$$

Recorrido

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 4x - 6} \Leftrightarrow 2yx^2 - 4yx - 6y = x^2 - 2x + 3$$
$$\Leftrightarrow (2y-1)x^2 - 2(2y-1)x - 3(2y+1) = 0$$

Si $2y-1=0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$, la ecuación se reduce a $-3(2y+1)=0$, lo que no conduce a ningún valor de "x". Luego $y \neq \frac{1}{2}$.

Con esto, sabemos que

$$x = \frac{2(2y-1) \pm \sqrt{\Delta}}{2(2y-1)} \quad ; \quad \Delta = 4(2y-1)^2 + 4 \cdot 3(2y-1)(2y+1)$$

Para que sea posible esto, $\Delta \geq 0$, por lo que necesitamos

$$\Delta = 4(2y-1)^2 + 4 \cdot 3(2y-1)(2y+1) = 4(2y-1)(2y-1+3(2y+1))$$
$$= 4(2y-1)(8y+2) = 8(2y-1)(4y+1) \geq 0 \quad ; \quad \text{Pts críticos: } \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y \in \mathbb{R} \setminus \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] = (-\infty, -\frac{1}{4}] \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

$$\therefore \text{Rec}(g) = (-\infty, -\frac{1}{4}] \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

Ceros: puesto que $0 \notin \text{Rec}(g)$, no hay ceros.

Paridad

$$g(-x) = \frac{(-x)^2 - 2(-x) + 3}{2(-x)^2 - 4(-x) - 6} = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 4x - 6} ; \text{distinto a } g(x) \text{ y } -g(x), \text{ por lo que no posee paridad.}$$

(Se puede decir que $1 \in \text{Dom}(g)$ pero $(-1) \notin \text{Dom}(g)$, por lo que no puede tener paridad ya que no se cumple que $\forall x \in \text{Dom}(g), (-x) \in \text{Dom}(g)$).

Acotamiento

Puesto que $\text{Rec}(g) = (-\infty, -\frac{1}{4}] \cup (\frac{1}{2}, \infty)$, la función no es acotada por arriba ni por debajo.

Crecimiento

Sea $x_1, x_2 \in \text{Dom}(g)$, $x_2 > x_1$

$$\begin{aligned} g(x_2) - g(x_1) &= \frac{x_2^2 - 2x_2 + 3}{2x_2^2 - 4x_2 - 6} - \frac{x_1^2 - 2x_1 + 3}{2x_1^2 - 4x_1 - 6} \\ &= \frac{(x_2^2 - 2x_2 + 3)(2x_1^2 - 4x_1 - 6) - (x_1^2 - 2x_1 + 3)(2x_2^2 - 4x_2 - 6)}{(2x_2^2 - 4x_2 - 6)(2x_1^2 - 4x_1 - 6)} \\ &= \frac{(-6x_2^2 + 12x_2 + 6x_1^2 - 12x_1) - (-6x_1^2 + 12x_1 + 6x_2^2 - 12x_2)}{4(x_2 - 3)(x_2 + 1)(x_1 - 3)(x_1 + 1)} \\ &= \frac{12x_1^2 - 12x_2^2 - 24x_1 + 24x_2}{4(x_2 - 3)(x_2 + 1)(x_1 - 3)(x_1 + 1)} = 3 \frac{(x_1^2 - x_2^2) - 2(x_1 - x_2)}{(\quad) \cdot (\quad) \cdot (\quad) \cdot (\quad)} \\ &= 3 \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 2(x_1 - x_2)}{(\quad) \cdot (\quad) \cdot (\quad) \cdot (\quad)} = \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2)}{(x_2 - 3)(x_2 + 1)(x_1 - 3)(x_1 + 1)} \end{aligned}$$

$$x_2 > x_1 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0.$$

Los puntos críticos del denominador son -1 y 3 . En el numerador es "uno" puesto que $x_1, x_2 \geq 1 \Rightarrow x_1 + x_2 - 2 \geq 0$; $x_1, x_2 \leq 1 \Rightarrow x_1 + x_2 - 2 \leq 0$.

Luego vemos los casos:

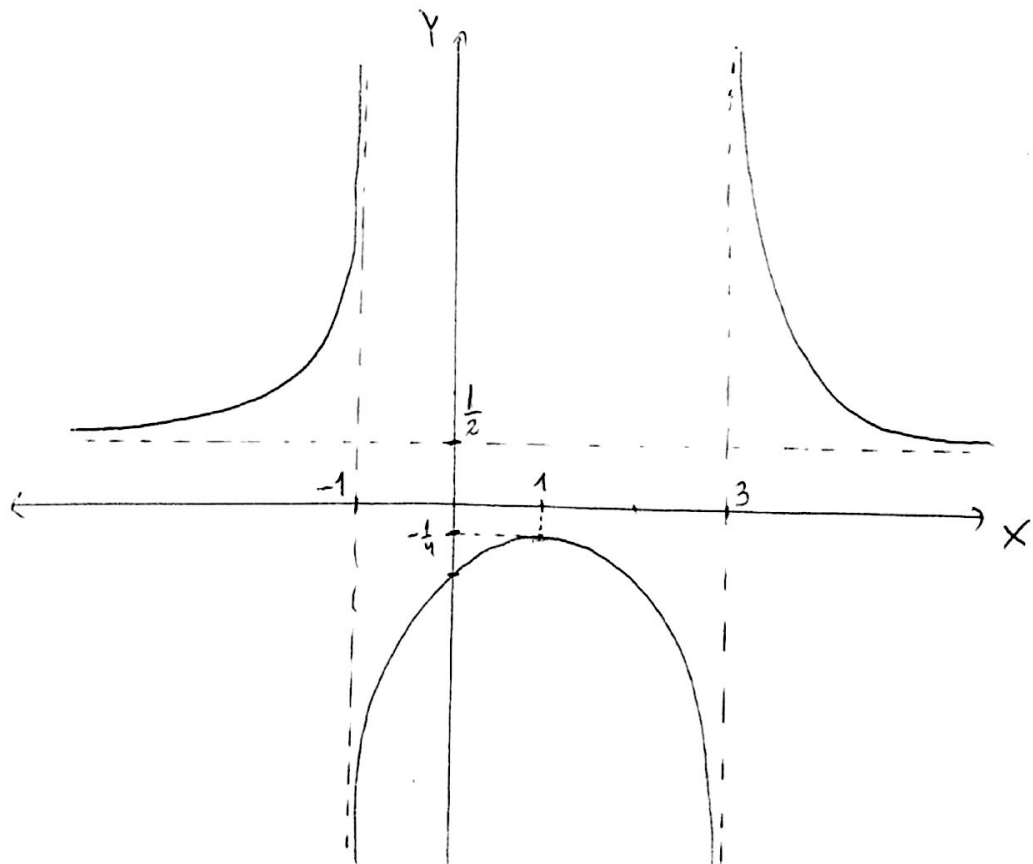
$$\bullet x_1, x_2 \in (-\infty, -1) \Rightarrow g(x_2) - g(x_1) = \frac{- \cdot -}{- \cdot - \cdot - \cdot -} = + \geq 0 \Rightarrow g(x_2) \geq g(x_1) \text{ creciente.}$$

$$\bullet x_1, x_2 \in (-1, 1) \Rightarrow g(x_2) - g(x_1) = \frac{- \cdot -}{- \cdot + \cdot - \cdot +} = + \geq 0 \Rightarrow g(x_2) \geq g(x_1) \text{ creciente.}$$

$$\bullet x_1, x_2 \in (1, 3) \Rightarrow g(x_2) - g(x_1) = \frac{- \cdot +}{- \cdot + \cdot - \cdot +} \leq 0 \Rightarrow g(x_2) \leq g(x_1) \text{ decreciente}$$

$$\bullet x_1, x_2 \in (3, \infty) \Rightarrow g(x_2) - g(x_1) = \frac{- \cdot +}{+ \cdot + \cdot + \cdot +} \leq 0 \Rightarrow g(x_2) \leq g(x_1) \text{ decreciente.}$$

Grafica:



Inyectividad

De la gráfica se puede ver fácilmente que no es inyectiva. Basta tomar algún valor menor a (-1) y podremos encontrar un valor mayor a 3 , claramente distinto al anterior, cuya imagen sea la misma.

Epiyectividad

Puesto que la función es real, $\text{Codom}(g) = \mathbb{R}$ y $\text{Rec}(g) \neq \text{Codom}(g)$, por lo que no es epiyectiva.

Restricciones para biyectividad.

• Arreglar inyectividad:

Se debe verificar: $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(g), g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Supongamos que $g(x_1) = g(x_2)$, es decir, $g(x_2) - g(x_1) = 0$. Del desarrollo para el crecimiento, nos queda

$$g(x_2) - g(x_1) = 0 \iff \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2)}{(x_2 - 3)(x_2 + 1)(x_1 - 3)(x_1 + 1)} = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) = 0.$$

Para implicar $x_1 = x_2$ (es decir, $x_1 - x_2 = 0$), necesitamos que $x_1 + x_2 - 2$ no pueda ser cero. Esto se puede resolver si x_1 y x_2 son mayores que 1 . Es decir, $x_1, x_2 \in (1, \infty)$. Note que si $x_1, x_2 \in [1, \infty)$, entonces $x_1 + x_2 - 2$ puede ser cero, pero solo si $x_1 = x_2 = 1$. Por lo tanto, si $x_1, x_2 \in [1, \infty)$,

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Restringimos $\text{Dom}(g) = [1, \infty)$.

• Arreglar epiyectividad

Del desarrollo para el recorrido, habíamos llegado a que

$$x = \frac{2(2y-1) \pm \sqrt{\Delta}}{2(2y-1)} \quad ; \quad \Delta = 8(2y-1)(4y+1)$$

$$x = 1 \pm \frac{\sqrt{8(2y-1)(4y+1)}}{2(2y-1)}$$

Puesto que $x \in [1, \infty)$, necesitamos

$$\pm \frac{\sqrt{8(2y-1)(4y+1)}}{2(2y-1)} \geq 0$$

Que se puede verificar para cualquier valor de "y" que no indetermina la expresión, gracias al " $\pm$ ". (Cuando la expresión del denominador sea positiva usamos "+", y cuando sea negativa usamos "-"). Estos valores, como se vio anteriormente, son $y \in (-\infty, -\frac{1}{4}] \cup (\frac{1}{2}, \infty)$.

Restringimos $\text{Codom}(g) = (-\infty, -\frac{1}{4}] \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ y se tiene que $\text{Codom}(g) = \text{Rec}(g)$ y es epiyectiva.

Luego $g: [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} \setminus (-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ es biyectiva y posee inversa $g^{-1}: \mathbb{R} \setminus (-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \rightarrow [1, \infty)$.

Para encontrar la fórmula de la inversa, aprovechamos el resultado

$$x = 1 \pm \frac{\sqrt{8(2y-1)(4y+1)}}{2(2y-1)} \quad ; \quad x \in [1, \infty)$$

Para cumplir la condición

$$\pm \frac{\sqrt{8(2y-1)(4y+1)}}{2(2y-1)} \geq 0$$

Podemos escribir simplemente

$$\begin{aligned} \pm \frac{\sqrt{8(2y-1)(4y+1)}}{2(2y-1)} &= \sqrt{\frac{8(2y-1)(4y+1)}{4(2y-1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2(4y+1)}{(2y-1)}} = \sqrt{\frac{8y+2}{2y-1}} \end{aligned}$$

Note que ingresar $(2y-1)$ a la raíz hizo uso implícito del " $\pm$ " ya que esta expresión no siempre es positiva.

Luego

$$g^{-1}(x) = 1 + \sqrt{\frac{8x+2}{2x-1}} //$$

P2)

$$2.- h(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{x+1}} = \sqrt{\frac{x+1-2}{x+1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

Dominio

$$h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \quad \text{Pls críticos: } -1, 1$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$$

$$\therefore \text{Dom}(h) = (-\infty, -1) \cup [1, \infty) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1) //$$

Recorrido

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad ; \quad |y| \geq 0$$

$$y^2 = \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow xy^2 + y^2 = x-1$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 1 = x(1-y^2)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+y^2}{1-y^2}$$

; para que exista algún x ,
necesitamos $y^2 \neq 1$, ya que si $y^2 = 1$,
tendríamos $1+1=0$. Luego $y^2 \neq 1$
 $\Rightarrow y \neq \pm 1$.

Ya que no hay más restricciones, $\text{Rec}(h) = [0, 1) \cup (1, \infty) //$

Ceros

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow \underline{x=1}$$

Paridad

Es fácil ver que $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$. Es más sencillo notar que $1 \in \text{Dom}(h)$ pero $(-1) \notin \text{Dom}(h)$, por lo que no puede tener paridad.

Acotamiento: El recorrido es $[0, \infty) \setminus \{1\}$, por lo que es acotado inferiormente, por ejemplo por "0".

Crecimiento

Sea $x_1, x_2 \in \text{Dom}(h)$, $x_2 > x_1$

$$\begin{aligned} h(x_2) - h(x_1) &= \left(\sqrt{\frac{x_2-1}{x_2+1}} - \sqrt{\frac{x_1-1}{x_1+1}} \right) \cdot \frac{\sqrt{\frac{x_2-1}{x_2+1}} + \sqrt{\frac{x_1-1}{x_1+1}}}{\sqrt{\frac{x_2-1}{x_2+1}} + \sqrt{\frac{x_1-1}{x_1+1}}} \\ &= \frac{\frac{x_2-1}{x_2+1} - \frac{x_1-1}{x_1+1}}{\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad}} = \frac{(x_2-1)(x_1+1) - (x_1-1)(x_2+1)}{(x_1+1)(x_2+1)(\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad})} \\ &= \frac{2x_2 - 2x_1}{(x_1+1)(x_2+1)(\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad})} = \frac{2(x_2 - x_1)}{(x_1+1)(x_2+1)(\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad})} \end{aligned}$$

• $x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$. En el denominador tenemos

$$x_1, x_2 \in (-\infty, -1) \Rightarrow (x_1+1) < 0 \wedge (x_2+1) < 0 \Rightarrow (x_1+1)(x_2+1) > 0$$

$$x_1, x_2 \in [1, \infty) \Rightarrow (x_1+1) > 0 \wedge (x_2+1) > 0 \Rightarrow (x_1+1)(x_2+1) > 0.$$

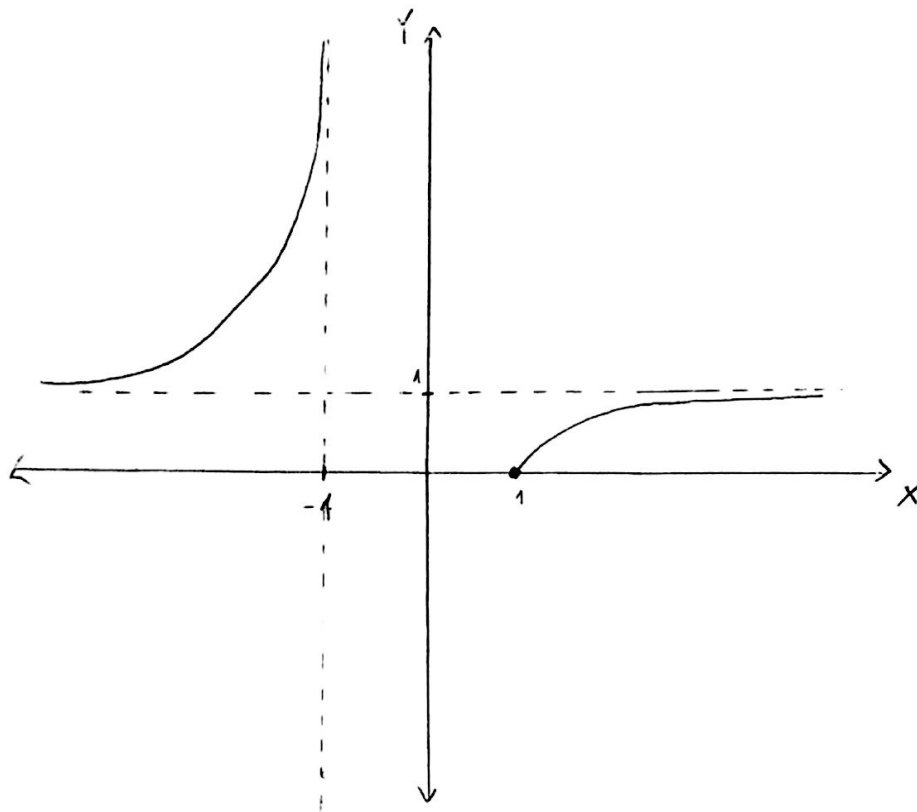
Por lo tanto:

- $x_1, x_2 \in (-\infty, -1)$, $h(x_2) - h(x_1) \geq 0 \Rightarrow h(x_2) \geq h(x_1)$ creciente
- $x_1, x_2 \in [1, \infty)$, $h(x_2) - h(x_1) \geq 0 \Rightarrow h(x_2) \geq h(x_1)$ creciente.

Note que $h(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$ y $[1, \infty)$ por separado.

No se tiene que $h(x)$ sea creciente (ie, en todo su dominio).

Bosquejo de gráfica para $h(x)$



Injectividad

Del desarrollo del crecimiento tenemos (para $x_1, x_2 \in \text{Dom}(h)$)

$$g(x_2) = g(x_1) \Leftrightarrow g(x_2) - g(x_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x_2 - x_1)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)(\sqrt{x_1 + 1} + \sqrt{x_2 + 1})} = 0$$
$$\Rightarrow x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Es decir, $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(h), g(x_2) = g(x_1) \Rightarrow x_2 = x_1$

Por lo tanto $h(x)$ es inyectiva.

Epinyectividad

Puesto que $\text{Codom}(h) = \mathbb{R}$ y $\text{Rec}(h) \neq \text{Codom}(h)$, no es epinyectiva.

Restricciones para biyectividad

Y_a es inyectiva. Para que sea epiyectiva basta con restringir

$$\text{Codom}(h) = [0, 1) \cup (1, \infty)$$

y se verifica $\text{Rec}(h) = \text{Codom}(h)$, es decir, es epiyectiva.

Luego $h: \mathbb{R} \setminus [-1, 1) \rightarrow [0, 1) \cup (1, \infty)$ es biyectiva y posee inversa $h^{-1}: [0, 1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \setminus [-1, 1)$. Para la fórmula de esta inversa, aprovechamos el resultado del recorrido

$$x = \frac{1+y^2}{1-y^2}.$$

Por lo tanto $h^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} //$

Propuesto

Usando que

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

hay que demostrar las identidades que aparecen.

La primera es:

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Usando la indicación, hacemos $x = a+b$ y $y = a-b$, en el lado izquierdo de la igualdad. Con esto tenemos:

$$\begin{aligned} \sin(x) + \sin(y) &= \sin(a+b) + \sin(a-b) \\ &= \left(\sin(a) \cos(b) + \cancel{\sin(b) \cos(a)} \right) + \left(\sin(a) \cos(b) - \cancel{\sin(b) \cos(a)} \right) \\ &= 2 \sin(a) \cos(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pero } \left. \begin{array}{l} a+b=x \\ a-b=y \end{array} \right| &\Rightarrow 2a = x+y \Rightarrow a = \frac{x+y}{2} \\ &\Rightarrow 2b = x-y \Rightarrow b = \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Los otros 3 son totalmente análogos.

- $$\begin{aligned}\cos(x) + \cos(y) &= \cos(a+b) + \cos(a-b) \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + (\cos a \cos b + \sin a \sin b) \\ &= 2 \cos(a) \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\sin(x) - \sin(y) &= \sin(a+b) - \sin(a-b) \\ &= (\sin a \cos b + \sin b \cos a) - (\sin a \cos b - \sin b \cos a) \\ &= 2 \sin(b) \cos(a) = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\cos(x) - \cos(y) &= \cos(a+b) - \cos(a-b) \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) - (\cos a \cos b + \sin a \sin b) \\ &= -2 \sin(a) \sin(b) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Lo importante es que estos resultados los tengan en mente. (no necesariamente memorizarlos). Saber que existen, y que cuando crean que pueden ser de utilidad, sean capaces de deducirlos de esta manera.

Note que esto sirve para factorizar, por lo que puede resultar de utilidad en algunas ecuaciones trigonométricas.